

# Cours d'analyse numérique de C. Bertelle

FMdKdD  
[fmdkdd \[à\] free.fr](mailto:fmdkdd@free.fr)

Université du Havre  
Année 2009–2010

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels d'algèbre linéaire</b>	<b>2</b>
1.1	Espace vectoriel	2
1.2	Applications linéaires et matrices	3
1.3	Matrice inverse d'une matrice carrée	4
1.4	Calcul du déterminant d'une matrice carrée	4
1.5	Trace d'une matrice carrée	4
1.6	Matrices transposées, orthogonales, hermitiennes, unitaires et normales	5
1.7	Valeurs propres et vecteurs propres de matrice	6
1.8	Matrices hermitiennes définies positives et matrices à diagonale dominante	6
1.9	Normes vectorielles et matricielles	7
1.10	Conditionnement d'une matrice	9
<b>2</b>	<b>Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires</b>	<b>10</b>
2.1	Introduction	10
2.2	Formule de Cramer	10
2.3	Méthode de Gauss	10
2.3.1	Triangulation du système	11
2.3.2	Résolution du système triangulaire	11
2.4	Méthode du pivot de Gauss	12
2.5	Place mémoire occupée	13
2.6	Méthode de factorisation LDR	13
2.6.1	Résolution du système linéaire avec la factorisation LDR	15
2.6.2	Intérêt de la méthode de factorisation	16
2.6.3	Calcul de l'inverse d'une matrice	16
<b>3</b>	<b>Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires</b>	<b>17</b>
3.1	Introduction	17
3.2	Une étude abstraite générale	18
3.3	Étude de cas particuliers de décomposition $A = M - N$	19
3.3.1	Méthode de Jacobi	19
3.3.2	Méthode de Gauss-Seidel	20
3.3.3	Méthode de relaxation	21
3.3.4	Exemples	21
3.3.5	Résultats sur la convergence des méthodes itératives	22

# Chapitre 1

## Rappels d'algèbre linéaire

### 1.1 Espace vectoriel

Un espace vectoriel  $E$  sur un corps commutatif  $K$  (en général  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) possède une loi de composition interne ( $E \times E \rightarrow E$ ) et une loi de composition externe ( $K \times E \rightarrow E$ ) qui ont des propriétés (voir rappel donné en cours).

**Définition 1.1.** Une base  $B$  d'un espace vectoriel  $E$  sur un corps  $K$  est un ensemble d'éléments de  $E$ ,  $B = (e_1, \dots, e_n)$ , si

$$\forall x \in E, \exists!^1 (x_1, \dots, x_n) \in K^n, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$E$  est dit de dimension  $n$ , et on note  $E = K^n$ .  $x$  se note  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n)$ .

Opérations sur les vecteurs :

– On définit le produit scalaire de deux vecteurs  $u$  et  $v$  de  $K^n$  par

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i \in K$$

avec  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ .

– On définit le produit vectoriel de deux vecteurs  $u$  et  $v$  de  $K^3$  par

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \in K^3$$

– On définit le produit mixte de trois vecteurs  $u, v, w \in K^3$  par

$$(u, v, w) = (uv) \cdot w \in K$$

---

1. Il existe de manière unique.

## 1.2 Applications linéaires et matrices

**Définition 1.2.** Soit  $f : K^n \rightarrow K^m$  une application linéaire si  $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in K^n$ ,

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Soit une base  $B = \{e_j; 1 \leq j \leq n\}$  une base de  $K^n$  et soit  $C = \{f_i; 1 \leq i \leq m\}$  une base de  $K^m$ .  $\forall j$  tel que  $1 \leq j \leq n$ ,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} f_i$$

On peut ranger tous les  $a_{i,j}$  dans un tableau :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

où  $M_{m,n}(K)$  est l'ensemble des matrices à  $m$  lignes et  $n$  colonnes à éléments dans  $K$ . Ainsi, pour tout élément  $x$  de  $K^n$ , on a  $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ , et

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j)$$

La matrice  $A$  caractérise complètement l'application linéaire  $f$ , et elle permet de calculer les transformations par  $f$  de tous les vecteurs de  $K^n$ . En effet, pour  $x =$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in K^m, \text{ on a}$$

$$y = f(x)$$

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$$

$$y = Ax$$

Le produit  $Ax = y$  étant :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}$$

Opérations élémentaires sur les matrices :

- L'addition :  $A + B = C$  si  $A, B \in M_{n,m}(K)$ ,  $C_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$ ,  $\forall i, j$
- La multiplication par un scalaire de  $K$  :  $\alpha A = C$ ,  $C_{i,j} = \alpha A_{i,j}$ ,  $\forall i, j$ .
- Le produit :  $AB = C$ , si  $A \in M_{m,n}(K)$ ,  $B \in M_{n,p}(K)$ ,  $C_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$ . Si  $A$  est associée à l'application linéaire  $f$ , et  $B$  associée à l'application linéaire  $g$ , alors  $AB$  est associée à  $f \circ g$ . Donc, si  $z = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ , alors  $z = (AB)x = A(Bx)$ .

Remarques.

- La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$  est élément neutre pour l'addition des matrices.
- La matrice  $\text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  est élément neutre de la multiplication.

### 1.3 Matrice inverse d'une matrice carrée

**Définition 1.3.**  $A \in M_{n,n}(K)$  est inversible (ou régulière) si  $\exists B \in M_{n,n}(K)$  telle que

$$AB = BA = \text{Id}$$

Le produit matriciel n'étant pas commutatif, il faut vérifier les deux produits  $AB$  et  $BA$ .  $B$  est notée  $A^{-1}$  et associée à l'application linéaire inverse de celle associée à  $A$ .

### 1.4 Calcul du déterminant d'une matrice carrée

Par développement de ligne ou de colonne :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \dots & & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\ = (-1)^{1+j} a_{1,j} \times \det(A_{[-1;-j]}) + \dots + (-1)^{n+j} a_{n,j} \times \det(A_{[-n;-j]})$$

où  $A_{[-i;-j]}$  est la matrice  $A$  sans la ligne  $i$  et sans la colonne  $j$ . Pour calculer un déterminant d'ordre  $n$ ,  $C(n) = nC(n-1) + a$  où  $a$  est une constante. D'où,  $C(n) \geq n!$ .

**Proposition 1.1.**

- $\det(\text{Id}) = 1$
- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $A$  est régulière (inversible) si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ .
- Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $(u, v, w) = \det(A)$  où  $A$  est la matrice dont les trois colonnes sont  $u$ ,  $v$  et  $w$ .
- Si  $A$  est triangulaire, alors  $\det A = \prod_{i=1}^n A_{i,i}$ .

### 1.5 Trace d'une matrice carrée

**Définition 1.4.** La trace est une application  $\text{tr} : M_{n,n}(K) \rightarrow K$  définie par  $A \mapsto \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,i}$ . Autrement dit, la trace d'une matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$  est la somme de ses  $n$  coefficients diagonaux.

**Proposition 1.2.**

- $\text{tr}(\text{Id}) = n$  pour une matrice d'ordre  $n$
- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$

## 1.6 Matrices transposées, orthogonales, hermitiennes, unitaires et normales

**Définition 1.5.** Soit  $A \in M_{m,n}(K)$ , on appelle transposée de  $A$ , notée  $A^t \in M_{n,m}(K)$ , définie par  $(A^t)_{i,j} = A_{j,i}$ ,  $\forall i, j$ .

*Remarque.* On assimile  $M_{n,1}(K)$  à  $K^n$ .

**Définition 1.6.** On dit que  $A$  est symétrique si  $A^t = A$  (et donc  $m = n$ ).

**Proposition 1.3.**

- $\det(A^t) = \det(A)$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$
- Si  $A$  est régulière (invertible), alors  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ , et donc  $A^t$  est également invertible.

**Définition 1.7.** On dit que  $A$  est orthogonale si et seulement si  $A^{-1} = A^t$ .

Dans la suite de la section, on se place dans  $K = \mathbb{C}$ , l'ensemble des nombres complexes.

**Définition 1.8.** On appelle  $A^*$ , adjointe de  $A$  :

$$(A^*)_{i,j} = \overline{A_{j,i}}$$

**Proposition 1.4.**

- $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$
- $(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
- $(AB)^* = B^* A^*$
- Si  $A$  est régulière,  $A^*$  l'est aussi et

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

**Définition 1.9.**  $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$  est hermitienne si  $A^* = A$ . En conséquence, les éléments diagonaux d'une matrice hermitienne sont des réels, et les éléments symétriques par rapport à la diagonale sont des conjugués.

**Définition 1.10.** On dit que  $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$  est unitaire si  $A^{-1} = A^*$ .

**Définition 1.11.** On dit que  $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$  est normale si elle commute avec son adjointe  $A^*$  :  $A^* A = A A^*$ .

*Remarque.* Une matrice hermitienne ou unitaire est normale.

**Théorème 1.1** (de factorisation d'une matrice normale). *A est normale si et seulement s'il existe une matrice  $U$  unitaire telle que :*

$$A = UDU^*$$

où  $D$  est la matrice diagonale des valeurs propres complexes de  $A$ .

## 1.7 Valeurs propres et vecteurs propres de matrice

Soit  $A \in M_{n,n}(K)$ .

**Définition 1.12.**  $\lambda \in K$  est appelée valeur propre de  $A$  si :

$$\exists x \in K^n, x \neq 0, Ax = \lambda x$$

$x$  est appelé le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Proposition 1.5** (caractéristique).  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  si et seulement si  $\det(A - \lambda \text{Id}) = 0$ .

On note  $\det(A - \lambda \text{Id}) = P(\lambda)$  le polynôme caractéristique de  $A$  de degré  $n$ .

*Remarques.*

- Si  $K = \mathbb{C}$ ,  $P(\lambda) = 0$  donc une équation de degré  $n$ , donc  $n$  racines complexes (pas nécessairement disjointes), d'où  $n$  valeurs propres complexes.
- Si  $K = \mathbb{R}$ , on n'a pas forcément  $n$  valeurs propres réelles.

**Définition 1.13.** On appelle spectre de  $A$ , noté  $\sigma(A)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $A$ .

On appelle rayon spectral  $\rho(A) = \max_{\lambda_i \in \sigma(A)} |\lambda_i|$ .

*Rappel.* Si  $z = x + iy$ , le module de  $z$  est  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Proposition 1.6.**

- $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
- $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$
- $(A^t) = {}^t(A)$
- $\rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$ , et  $\rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$ , qui sont deux normes matricielles.

**Définition 1.14.**  $A \in M_{n,n}(K)$  est diagonalisable s'il existe  $P \in M_{n,n}(K)$  inversible telle que :

$$\underbrace{PAP^{-1}}_{\text{nouvelle base}} = D$$

où  $D$  est la matrice diagonale des valeurs propres de  $A$ , et où  $P$  est formée des vecteurs propres de  $A$  qui constituent ainsi une nouvelle base.

Si  $A$  est diagonalisable, ses vecteurs propres sont linéairement indépendants.

## 1.8 Matrices hermitiennes définies positives et matrices à diagonale dominante

**Définition 1.15.** Une matrice carrée  $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$  hermitienne est dite positive si :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0 \text{ alors } x^*Ax > 0$$

*Remarque.*  $x^*Ax \in \mathbb{C}$ , et

$$\begin{aligned} (x^*Ax)^* &= x^*A^*x^{**} \\ &= x^*Ax \end{aligned}$$

donc  $x^*Ax \in \mathbb{R}$ , comparable à 0.

**Définition 1.16.** Une matrice  $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$  est dite à diagonale dominante (resp. strictement dominante) si :

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$$

resp.

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$$

**Proposition 1.7.** Une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

## 1.9 Normes vectorielles et matricielles

**Définition 1.17** (norme vectorielle). Un norme  $N : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifie les propriétés :  
 $\forall x, y \in \mathbb{C}^n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ ,

1.  $N(x) \geq 0$
2.  $N(x) = 0 \iff x = 0$
3.  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  (inégalité triangulaire)
4.  $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$

**Définition 1.18.** La norme de la convergence en moyenne  $N_1$  est définie par :

$$N_1(x) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

L'espace vectoriel normé par  $N_1$  est appelé  $L_1$ .

**Définition 1.19.** La norme euclidienne  $N_2$  est définie par :

$$N_2(x) = \|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

L'espace vectoriel normé par  $N_2$  est appelé  $L_2$ .

**Définition 1.20.** La norme de la convergence absolue  $N_\infty$  est définie par :

$$N_\infty(x) = \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

L'espace vectoriel normé par  $N_\infty$  est appelé  $L_\infty$ .

**Définition 1.21.** De manière générale, l'espace vectoriel  $L_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , est normé par  $N_p$  définie par :

$$N_p(x) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$



*Remarque.* Dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  :

$$u \cdot v = \|u\|_2 \|v\|_2 \cos(\widehat{u, v})$$

$u \cdot v$  est nul si  $u = 0$ , ou  $v = 0$ , ou si  $\cos(\widehat{u, v}) = 0$ , et  $u$  et  $v$  sont dits orthogonaux.

Dans  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\|u \wedge v\|_2 = \|u\|_2 \|v\|_2 |\sin(\widehat{u, v})|$$

C'est l'aire du parallélogramme défini par  $u$  et  $v$ .  $u \wedge v$  est perpendiculaire à  $u$  et à  $v$  car

$$(u \wedge v) \cdot u = (u \wedge v) \cdot v = (u, v, u) = (u, v, v) = 0$$

La définition précédente d'une norme vectorielle s'applique à tout espace vectoriel, donc à l'espace vectoriel des matrices.

**Définition 1.22.** Norme de Schurman (?) sur  $M_{n,n}(K)$

$$\|A\|_s = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On peut vérifier facilement que c'est bien une norme au sens de la définition 1.17.

**Définition 1.23.** Norme matricielle associée, subordonnée et induite.

Soient  $A \in M_{n,n}(K)$ ,  $N_m$  et  $N_n$  deux normes vectorielles sur  $K^m$  et  $K^n$ . On appelle norme matricielle induite, la norme :

$$\|A\| = \max_{N_n(x)=1} N_m(Ax)$$

**Proposition 1.8.**

1. Ce sont des normes au sens de la définition 1.17,
2.  $\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
3.  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \forall x \in K^n$
4.  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$
5.  $\|I\| = 1$

**Définition 1.24.** Norme matricielle associée à  $L_1$  :

$$\|A\|_1 = \max_j \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$$

**Définition 1.25.** Norme matricielle associée à  $L_2$  :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\phi(A^*A)}$$

**Définition 1.26.** Norme matricielle associée à  $L_\infty$  :

$$\|A\|_\infty = \max_i \left( \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right)$$

*Remarques.* La norme de Schurman (?) n'est pas une norme matricielle induite ( $\|I\|_s = \sqrt{n}$ ).

Si  $A$  est hermitienne, on peut montrer  $\|A\|_2 = \phi(A)$ .

## 1.10 Conditionnement d'une matrice

**Définition 1.27.** Soit  $A \in M_{n,n}(K)$  inversible et  $\|\cdot\|$  une norme matricielle sur  $M_{n,n}(K)$ . On appelle conditionnement de  $A$  relativement à une norme matricielle  $\|\cdot\|$ , le nombre réel positif :

$$\text{card}(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\|$$

**Exemple.** Soit le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

De solution  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On considère le système perturbé pour lequel les coefficients du second membre ont été légèrement modifiés :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 + \delta_1 \\ u_2 + \delta_2 \\ u_3 + \delta_3 \\ u_4 + \delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{pmatrix}$$

La solution est  $\begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}$ . On constate qu'une erreur relative de l'ordre de  $\frac{1}{200}$  sur les données entraîne une erreur relative sur le résultat de l'ordre de 10.

On a un coefficient d'amplification entre les erreurs relatives sur les données et les erreurs relatives sur le résultat de 2000. On a le même phénomène si on introduit des perturbations sur les coefficients de la matrice.

## Chapitre 2

# Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

### 2.1 Introduction

Soient  $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ,  $x, b \in \mathbb{R}^n$  et l'équation  $Ax = b$ . On cherche  $x$  qui vérifie l'équation avec  $A$  et  $b$  donnés.

*Remarque.* Le système a une solution unique si et seulement si  $\det A \neq 0$ .

On a deux familles de méthodes :

- les méthodes directes : algorithme qui fournit en un temps fini la solution exacte,
- les méthodes itératives : on calcule une suite de vecteurs qui convergent vers la solution.

### 2.2 Formule de Cramer

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

$A_i$  : matrice obtenue à partir de  $A$  en remplaçant la  $i^e$  colonne par le vecteur second membre  $b$  (coût de l'ordre de  $n.n!$ ).

Pour  $n = 15$ , coût d'environ  $10^{13}$  opérations. Sur une machine qui effectue  $10^{16}$  opérations par seconde, cela prendrait 4 mois de calcul.

### 2.3 Méthode de Gauss

On procède en deux étapes :

- On transforme le système en un système triangulaire supérieur équivalent,
- On résout le système triangulaire.

### 2.3.1 Triangulation du système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

1<sup>re</sup> étape : on effectue des combinaisons linéaires d'équations pour éliminer les coefficients de  $x_1$  pour la première ligne. Par exemple, pour la ligne  $(i)$ ,  $2 \leq i \leq n$ , on la remplace par  $(i) - \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ .

Pour chaque coefficient de la ligne  $(i)$  on devra le remplacer par :  $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}$  pour  $2 \leq j \leq n$ .

2<sup>e</sup> étape :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ 0 + \cdots + a_{hk}x_k + \cdots + a_{hn}x_n = b_h \\ 0 + \cdots + a_{nk}x_k + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

La combinaison linéaire appliquée à tous les éléments de la ligne  $i$  :

$$a_{ij}^{(k)} \leftarrow a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)} \quad k+1 \leq j \leq n$$

$$b_i^{(k)} \leftarrow b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_k$$

Algorithme :

```

for  $k = 1$  à  $n - 1$  do
  {traitement pour savoir si  $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ }
  for  $i = k + 1$  à  $n$  do
     $C \leftarrow a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$ 
    for  $j = k + 1$  à  $n$  do
       $a_{ij}^{(k)} \leftarrow a_{ij}^{(k-1)} - C * a_{kj}^{(k-1)}$ 
    end for
     $b_i^{(k)} \leftarrow b_i^{(k-1)} - C * b_k^{(k-1)}$ 
  end for
end for
    
```

### 2.3.2 Résolution du système triangulaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ 0 + \cdots + 0 + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On résout par remontée :

$$\begin{aligned} (n) &\mapsto x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ (n-1) &\mapsto a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ &\vdots \\ (i) &\mapsto a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ x_i &= \frac{(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j)}{a_{ii}} \end{aligned}$$

Algorithme

```

for  $i = n$  à  $1$  do
   $x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j) / a_{ii}$ 
end for
    
```

## 2.4 Méthode du pivot de Gauss

Problème : l'algorithme ne fonctionne pas si  $a_{11} = 0$  ou  $a_{22}^{(1)} = 0$ , ou  $a_{kk}^{(k-1)} = 0$ . Si  $a_{kk}^{(k-1)} = 0$ , on recherche parmi les coefficients  $\{a_{ik}; k+1 \leq i \leq n\}$  un coefficient non nul, par exemple sur la ligne  $j$ .

En permutant les lignes  $k$  et  $j$ , on a résolu le problème. Par contre, si tous les coefficients sont nuls, alors on sait que

$$\det A = a_{11} \times a_{22} \times \dots \times a_{k-1,k-1} \times \begin{vmatrix} a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\det A = 0$

Le système n'a pas de solution et on s'arrête.

Pour éviter des singularités numériques ou des propagations d'erreurs numériques, on recherche :

$$\max \{|a_{ik}|; h+1 \leq i \leq n\}$$

Soit  $j$  la ligne correspondant à ce coefficient, on permute les deux lignes  $k$  et  $j$  (sans oublier le second membre). Si le  $\max < \varepsilon$  (considéré comme un zéro numérique), alors on considère que la matrice est singulière ( $\det A = 0$ ).

**Exemple.**

$$\begin{cases} 10^{-4}x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$x \simeq 1,00010\dots$   
 $y \simeq 0,999909\dots$

On travaille avec une matrice à 3 nombres. On ne permute pas les lignes :

$$\begin{cases} 10^{-4}x + y = 1 \\ \left(1 - \frac{1}{10^{-4}} \times 10^{-4}\right)x + \left(1 - \frac{1}{10^{-4}} \times 1\right)y = \left(2 - \frac{1}{10^{-4}} \times 1\right) \end{cases}$$

Avec 3 chiffres significatifs,  $-10^{-4}y = -10^4 \Rightarrow y = 1$ . On reporte dans la première équation :  $10^{-4}x = 0 \Rightarrow x = 0$ .

Si on permute les deux expressions :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 10^{-4}x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ \left(1 - \frac{10^{-4}}{1} \times 1\right) y = \left(1 - \frac{10^{-4}}{1} \times 2\right) \end{cases}$$

## 2.5 Place mémoire occupée

L'algorithme de triangulation fait intervenir des coefficients de  $A^{(k-1)}$  et  $A^{(k)}$  : on a besoin de deux matrices.

Formule centrale :

$$a_{ij}^{(k)} \leftarrow a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}, k+1 \leq i, j \leq n$$

On a besoin que d'une seule matrice. Pourquoi ? Après le calcul de  $a_{ij}^{(k)}$ , on ne réutilisera jamais  $a_{ij}^{(k-1)}$  donc on peut remplacer.

## 2.6 Méthode de factorisation LDR

On factorise la matrice A du système sous la forme du produit de trois matrices :

$$A = LDR$$

où

- L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité,
- D est une matrice diagonale,
- R est une matrice triangulaire supérieure à diagonale unité.

On peut montrer que la décomposition est unique.

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n L_{ik} (DR)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n L_{ik} \left( \sum_{l=1}^n D_{kl} R_{lj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n L_{ik} D_{kk} R_{kj} \end{aligned}$$

car  $D_{kl} = 0$  sauf si  $k = l$  puisque D est diagonale.

Si  $i < j$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} D_{kk} R_{kj} + L_{ii} D_{ii} R_{ij} + \sum_{k=i+1}^n L_{ik} D_{kk} R_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} D_{kk} R_{kj} + L_{ii} D_{ii} R_{ij} \\ R_{ij} &= \frac{1}{D_{ii}} \left[ A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} D_{kk} R_{kj} \right] \end{aligned}$$

car  $L_{ik} = 0$  quand  $i < k$ .

Si  $i = j$

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} D_{kk} R_{ki} + L_{ii} D_{ii} R_{ii} + \sum_{k=i+1}^n L_{ik} D_{kk} R_{ki} \\ D_{ii} &= A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} D_{kk} R_{ki} \end{aligned}$$

car  $L_{ik} = 0$  pour  $i < k$ , et  $L_{ii} = R_{ii} = 1$ .

Si  $i > j$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} D_{kk} R_{kj} + L_{ij} D_{jj} R_{jj} + \sum_{k=j+1}^n L_{ik} D_{kk} R_{kj} \\ L_{ij} &= \frac{1}{D_{jj}} \left[ A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} D_{kk} R_{kj} \right] \end{aligned}$$

### Algorithme

```

for  $i = 1$  à  $n$  do
  for  $j = 1$  à  $i - 1$  do
     $L_{ij} \leftarrow \frac{1}{D_{jj}} \left( A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} D_{kk} R_{kj} \right)$ 
  end for
   $D_{ii} \leftarrow A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} D_{kk} R_{ki}$ 
  for  $j = i + 1$  à  $n$  do
     $R_{ij} \leftarrow \frac{1}{D_{ii}} \left( A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} D_{kk} R_{kj} \right)$ 
  end for
end for

```

Est-elle calculable ? On peut regarder les indices pour s'en convaincre, pour le cas  $i > j$  par exemple :

$$L_{ij} \leftarrow \underbrace{\frac{1}{D_{jj}}}_{j < i} \left( A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \underbrace{L_{ik}}_{k < j} \underbrace{D_{kk}}_{k < i} \underbrace{R_{kj}}_{k < i} \right)$$

**Stockage des matrices L, D et R** Dans les trois formules de calcul  $L_{ij}$ ,  $D_{ii}$  et  $R_{ij}$ , seul le coefficient de A de même ordre que celui du calcul en cours est utilisé. Donc le coefficient  $A_{ij}$  une fois utilisé ne sera plus réutilisé dans la suite de la factorisation, et on peut donc l'effacer et le remplacer par le coefficient en cours de calcul.

Ainsi, une seule matrice est nécessaire pour l'algorithme, et on peut remplacer tous les L,R et D par A.

*Remarque.* Une méthode fréquemment rencontrée est la factorisation LU :

$$A = LU$$

où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et où U est une matrice triangulaire supérieure.  $U = DR$  où D et R sont les matrices de la factorisation  $A = LDR$ .

Si A est symétrique,  $A^t = A$  :

$$\begin{aligned} A &= LDR \\ A^t &= (LDR)^t \\ &= R^t D^t L^t \end{aligned}$$

$R^t$  est triangulaire inférieure à diagonale unité,  $L^t$  est triangulaire supérieure à diagonale unité et  $D^t$  est diagonale. Donc, comme  $A = A^t$ ,  $L = R^t$ . Pour une matrice symétrique, on peut se passer d'un des facteurs.

En revanche, pour la méthode LU :

$$\begin{aligned} A &= LU \\ A^t &= (LU)^t \\ &= U^t L^t \end{aligned}$$

$U^t$  est triangulaire inférieure mais pas à diagonale unité. On change alors de méthode de factorisation pour les matrices symétriques : on pose  $A = LL^t$  où L est triangulaire inférieure mais pas à diagonale unité.

### 2.6.1 Résolution du système linéaire avec la factorisation LDR

Le système à résoudre s'écrit :  $Ax = b$  avec  $A = LDR$ , d'où :

$$\begin{aligned} (LDR)x &= b \\ LD \underbrace{Rx}_z &= b \\ \underbrace{\quad}_y \end{aligned}$$

On résout en trois étapes :

1. On calcule y solution de  $Ly = b$ , avec L matrice triangulaire inférieure à diagonale unité,
2. On calcule z solution de  $Dz = y$ , avec D matrice diagonale,
3. On calcule x solution de  $Rx = z$ , avec R matrice triangulaire supérieure à diagonale unité.

Dans les TP pour les trois appels successifs permettant de résoudre les systèmes 1,2 et 3, on transmettra la matrice A directement.



### 2.6.2 Intérêt de la méthode de factorisation

Dans la transformation qui correspond à la factorisation, on n'agit pas sur le second membre  $b$ , par opposition avec ce qui est fait dans la méthode de Gauss.

Si on doit résoudre plusieurs systèmes linéaires avec la même matrice et des seconds membres différents, on ne fera qu'une seule fois la factorisation LDR.

### 2.6.3 Calcul de l'inverse d'une matrice

Pour résoudre  $AA^{-1} = \text{Id}$ , on résout  $n$  systèmes linéaires :

$$\begin{aligned} Ax &= E_1 \\ Ax' &= E_2 \\ &\vdots \\ Ax^{(n-1)} &= E_n \end{aligned}$$

où  $E_i$  est la  $i^{\text{e}}$  colonne de la matrice  $\text{Id}$ . Les  $x^{(i)}$  forment les colonnes de la matrice  $A^{-1}$ .

Pour la résolution de ces systèmes, la méthode de factorisation vue précédemment est bien plus efficace que la méthode de Gauss, car  $A$  est conservée.

*Remarque.* Dans l'algorithme de factorisation LDR, on effectue des divisions par les coefficients de  $D$ . Que faire si l'un d'eux est nul ?

On a un résultat qui dit que si tous les mineurs principaux de  $A$  sont non nuls, alors la matrice peut se factoriser sous la forme LDR. Le mineur d'ordre  $n$  est  $\det A$ , le mineur d'ordre  $n - 1$  est le déterminant de la matrice  $A$  privée des lignes et colonnes  $n$ ,  $\dots$ . Dans la pratique, on regarde si les coefficients diagonaux de  $D$  calculés sont non nuls, et on peut dire que la méthode ne s'applique pas.

Peut-on permuter des lignes en cours de résolution, comme on le fait pour la méthode de Gauss ? Si on permute une ligne dans la matrice  $A$ , on doit mémoriser les permutations effectuées pour les appliquer ultérieurement aux seconds membres. On peut pour cela conserver un vecteur d'indices :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

On transforme le second membre  $b$  en  $c$ , de façon à avoir  $c_i \leftarrow b_{\text{permut}(i)}$ . Ainsi, la méthode LDR peut s'appliquer aux mêmes matrices que la méthode de Gauss.

## Chapitre 3

# Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

### 3.1 Introduction

Résolution du système  $Ax = b$  avec  $A \in M_{n,n}(K)$ ,  $b, x \in K^n$  et  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Une méthode itérative consiste à :

- à partir de  $x^{(0)}$ , « estimation » de  $x$ ,
- générer une suite de vecteurs  $x^{(h)}$  par une relation de récurrence :

$$x^{(h+1)} = F_k(x^{(h)}, x^{(h-1)}, \dots, x^{(h-i)})$$

relation multi-pas sur  $i$  termes.

Si  $F_k$  est indépendante de  $k$ , on parle d'itération stationnaire.

*Remarque.* La méthode est dite convergente si la suite  $(x^{(k)})$  converge vers  $x$ . D'une manière pratique, on arrête les calculs avec le test :

$$\frac{\|b - Ax^{(k)}\|}{\|b\|} \leq \varepsilon$$

pour un  $\varepsilon$  donné. Si  $\varepsilon = 10^{-p}$ , les  $p$  premiers chiffres significatifs de  $b$  et  $Ax^{(k)}$  sont identiques. Plus précisément, le sens de l'identité dépend de la norme utilisée :

- en moyenne sur les  $n$  coefficients si  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ ,
- pour tous les coefficients si  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ .

Une autre condition d'arrêt, moins fiable, consiste à regarder l'évolution de la suite :

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k)}\|} \leq \varepsilon$$

Il y a un problème si, en cours de calcul, on obtient  $x = 0$ .

### 3.2 Une étude abstraite générale

On écrit  $A$  sous la forme  $M - N$  avec  $M, N \in M_{n,n}(K)$ .

$$A = M - N$$

$M$  doit être facilement inversible (diagonale ou triangulaire, par exemple).

On a le système :

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (M - N)x &= b \\ Mx - Nx &= b \\ Mx &= Nx + b \end{aligned}$$

C'est une formule de point fixe ( $f(x) = x$ ). On peut en déduire un processus itératif.

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné dans } K^n \\ Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \end{cases}$$

À chaque itération, on doit résoudre un système linéaire de matrice  $M$  que l'on peut écrire

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

Dans la pratique, on ne calcule pas  $M^{-1}$  mais on résout le système de matrice  $M$ .

**Étude de convergence**  $x$  solution de  $Ax = b$ . On pose  $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ , l'erreur à l'étape  $k$ .

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \\ e^{(k+1)} &= x^{(k+1)} - x \\ &= M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b - x \\ &= M^{-1}Nx^{(k)} - M^{-1}Nx \\ &= M^{-1}N(x^{(k)} - x) \\ &= M^{-1}Ne^{(k)} \end{aligned}$$

Pour passer de  $e^{(k)}$  à  $e^{(k+1)}$ ,

$$e^{(k+1)} = M^{-1}Ne^{(k)}$$

$T = M^{-1}N$  est la matrice d'itération :

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= Te^{(k)} \\ &= T^2e^{(k-1)} \\ &\vdots \\ e^{(k)} &= T^ke^{(0)} \end{aligned}$$

La méthode converge si  $e^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ .

$$\begin{aligned} T^k e^{(0)} &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} T^k &= 0 \end{aligned}$$

**Théorème 3.1** (admis). Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0$  est que  $\rho(T) < 1$ . Avec  $\rho(T) = \max_{\lambda_i \in \sigma(T)} |\lambda_i|$ .

*Remarque.* Si  $(x^k)$  est une suite réelle,  $x^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ , il faut  $|x| < 1$ .

On peut montrer que pour toute matrice  $A$ , on a  $\rho(A) \leq \|A\|$  pour toutes les normes matricielles associées (à des normes vectorielles).

**Corollaire 3.1.** Si  $\|\cdot\|$  est une norme subordonnée telle que  $\|T\| < 1$  alors le processus itératif converge vers la solution de  $Ax = b$ .

### 3.3 Étude de cas particuliers de décomposition $A = M - N$

Décomposition  $A = D - E - F$ , où :

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & & -F \\ & D & & \\ -E & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

–  $D$  est une matrice diagonale,

$$\begin{cases} D_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \\ D_{ii} = A_{ii} \end{cases}$$

–  $E$  est une matrice triangulaire inférieure,

$$\begin{cases} E_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j \\ E_{ij} = -A_{ij} \text{ si } i > j \end{cases}$$

–  $F$  est une matrice triangulaire supérieure,

$$\begin{cases} F_{ij} = 0 \text{ si } i \geq j \\ F_{ij} = -A_{ij} \text{ si } i < j \end{cases}$$

#### 3.3.1 Méthode de Jacobi

**Formulation matricielle**  $A = M - N = D - E - F$ , avec  $M = D$  et  $N = E + F$ . Le processus itératif :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \end{cases}$$

À chaque itération, on doit résoudre le système diagonal :

$$Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b$$

avec  $D_{ii} = A_{ii} \neq 0, \forall i$ .

**Mise en œuvre effective**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Pour appliquer le processus itératif, on transforme :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k+1)} &= -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} + b_1 \\ a_{22}x_2^{(k+1)} &= -a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} + b_2 \\ a_{33}x_3^{(k+1)} &= -a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} + b_3 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} + b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{-a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} + b_2}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{-a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} + b_3}{a_{33}} \end{aligned}$$

**3.3.2 Méthode de Gauss-Seidel**

**Formulation matricielle** Cette fois-ci on pose  $M = D - E$  et  $N = F$ . On doit alors résoudre à chaque itération le système diagonal :

$$(D - E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$$

**Mise en œuvre effective** Les coefficients de E sont à l'ordre  $(k + 1)$  maintenant :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k+1)} &= -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} + b_1 \\ a_{22}x_2^{(k+1)} &= -a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} + b_2 \\ a_{33}x_3^{(k+1)} &= -a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} + b_3 \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} + b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{-a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} + b_2}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{-a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} + b_3}{a_{33}} \end{aligned}$$

Même si les  $x$  à l'ordre  $(k + 1)$  ne sont pas tous du côté gauche des équations, si l'on résout le système de haut en bas, ils seront tous calculés avant d'être utilisés.

### 3.3.3 Méthode de relaxation

Formulation de la méthode de Gauss-Seidel :

$$a_{ii}x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i$$

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} - a_{ii}x_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}\right)}{a_{ii}}$$

$x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} = \Delta_i^{(k+1)}$  est l'écart entre deux itérés successifs.

Dans la méthode de relaxation, on introduit un facteur de relaxation  $\omega$  :

$$\Delta_i^{(k+1)} = \omega \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}\right)}{a_{ii}}$$

pour obtenir la formule de récurrence :

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

On peut vérifier que la formulation matricielle associée est

$$M = \frac{1}{\omega}(D - \omega E)$$

$$N = \frac{1}{\omega}((1 - \omega)D + \omega F)$$

### 3.3.4 Exemples

Résoudre

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 = 12 \end{cases}$$

De solution exacte  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . On part de  $x^{(0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , et on applique les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Méthode de Jacobi :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{11 - x_2^{(k)}}{10} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{12 - 2x_1^{(k)}}{10} \end{cases}$$

$$x^{(0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} x^{(1)} \begin{pmatrix} 11/10 \\ 12/10 \end{pmatrix} x^{(2)} \begin{pmatrix} 98/100 \\ 98/100 \end{pmatrix} x^{(3)} \begin{pmatrix} 1002/1000 \\ 1004/1000 \end{pmatrix} \dots$$

Méthode de Gauss-Seidel :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{11 - x_2^{(k)}}{10} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{12 - 2x_1^{(k+1)}}{10} \end{cases}$$

$$x^{(0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} x^{(1)} \begin{pmatrix} 11/10 \\ 98/10 \end{pmatrix} x^{(2)} \begin{pmatrix} 1002/1000 \\ 9996/10000 \end{pmatrix} \dots$$

Résoudre

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 11 \\ 10x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$$

de même solution que le système précédent.

Méthode de Jacobi :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 11 - 10x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 6 - 5x_1^{(k)} \end{cases}$$

$$x^{(0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} x^{(1)} \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix} x^{(2)} \begin{pmatrix} -49 \\ -49 \end{pmatrix} x^{(3)} \begin{pmatrix} 501 \\ 251 \end{pmatrix} \dots$$

Méthode de Gauss-Seidel :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 11 - 10x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 6 - 5x_1^{(k+1)} \end{cases}$$

$$x^{(0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} x^{(1)} \begin{pmatrix} 11 \\ -49 \end{pmatrix} x^{(2)} \begin{pmatrix} 501 \\ -2499 \end{pmatrix} \dots$$

### 3.3.5 Résultats sur la convergence des méthodes itératives

**Proposition 3.1.** Si  $A$  est à diagonale strictement dominante, alors quelque soit  $x^{(0)}$  donné :

- la méthode de Jacobi converge,
- la méthode de Gauss-Seidel converge,
- la méthode de relaxation converge, si  $0 < \omega \leq 1$ .

**Proposition 3.2.** Si  $A$  est hermitienne définie positive, alors quelque soit  $x^{(0)}$  :

- la méthode de Gauss-Seidel converge,
- la méthode de relaxation converge si et seulement si  $0 < \omega < 2$ .

**Proposition 3.3.** La méthode de relaxation converge implique que  $0 < \omega < 2$ .