Cours d'analyse 3 de J.-P. Troallic

FMdKdD[1]
fmdkdd [à] free.fr

Université du Havre
Année 2008–2009

1. Merci à Raphaël Legoy pour ses corrections.

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

1.1 Normes

1.1.1 Définitions

1.1 Définitions. 1. Soit E un espace vectoriel réel. On appelle norme sur E toute application $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes :

   (a) $\forall x \in \mathrm{E},\ \|x\| = 0 \iff x = 0$

   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{E},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

   (c) $\forall x, y \in \mathrm{E},\ \left\|x+y\right\| \leqslant \|x\| + \left\|y\right\|$

2. Le couple constitué par un espace vectoriel réel E et pas une norme $x \mapsto \|x\| : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ est appelé un espace vectoriel réel normé . Pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|x\|$ est appelée la norme du vecteur x. Notation : $(\mathrm{E}, \|.\|)$.

1.1.2 Propriétés essentielles

1.1 Proposition. *Soit* $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé (e.v.r.n). Alors :*

1. *Pour tout* $x \in \mathrm{E}$*, on a* $\|-x\| = \|x\|$.
2. *Pour tous* $x, y \in \mathrm{E}$*, on a* $\left|\|x\| - \left\|y\right\|\right| \leqslant \left\|x-y\right\|$.

Démonstration. 1. $\|-x\| = \|(-1)x\| = |-1|\,\|x\| = \|x\|$

2. $\|x\| = \left\|x-y+y\right\| \leqslant \left\|x-y\right\| + \left\|y\right\|$ donc $\|x\| - \left\|y\right\| \leqslant \left\|x-y\right\|$. Comme $\left\|y\right\| - \|x\| \leqslant \left\|y-x\right\| = \left\|x-y\right\|$, on a $\left|\|x\| - \left\|y\right\|\right| \leqslant \left\|x-y\right\|$.

□

1.1.3 Exemples

Exemples. 1. L'application $x \mapsto |x| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

2. Soit X un ensemble et soit $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$ [1]. On définit une norme sur $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ en posant $\left\|f\right\| = \sup_{x \in \mathrm{X}} \left|f(x)\right|$ pour tout $f \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathbb{R})$.

1. Une application $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ est dite bornée s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(\mathrm{X}) \subseteq [\alpha, \beta]$, ou, de manière équivalente, s'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ strictement positif tel que $\left|f(x)\right| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $x \in \mathrm{X}$.

1.1.4 Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

1.2 Proposition. *Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, posons :*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

Alors :

1. *Pour tout $i \in \{1, 2, \infty\}$ l'application $x \mapsto \|x\|_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est une norme sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$. La norme $\|.\|_2$ est appelée la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$.*

Démonstration. 1. On vérifie facilement que $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$. Montrons que $\|.\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Les conditions (a) et (b) de 1.1 sont simples à vérifier ; établissons (c). Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \lambda^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Le trinôme du second degré en λ sur $\mathbb{R}$ obtenu est toujours positif ou nul ; son discriminant est donc inférieur ou égal à 0, autrement dit on a

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leqslant 0$$

On en déduit que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \|x\|_2 \|y\|_2$$

L'inégalité de Schwarz. On a alors :

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\
&\leqslant \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2 \\
&\leqslant (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|x + y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2$$

2. Exercice.

□

1.1.5 Normes équivalentes

1.2 Définition. Soit E un espace vectoriel réel et soient $N_1 : E \to \mathbb{R}_+$ et $N_2 : E \to \mathbb{R}_+$ deux normes sur E. On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe des réels strictement positifs α et β tels que pour tout $x \in E$ l'on ait $N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x)$ et $N_2(x) \leqslant \beta N_1(x)$.

D'après le 2 de 1.2, les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux équivalentes.

On vérifie aisément que la relation binaire R sur l'ensemble des normes de E définie par $N_1 R N_2$ si et seulement si N_1 et N_2 sont équivalentes est une relation d'équivalence.

Remarque. On peut montrer que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes entre elles.

1.2 Topologie associée à une norme

1.2.1 Définitions

1.3 Définitions. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel réel normé.

1. Pour tout $x \in E$ et tout réel $r > 0$, on pose $B(x,r) = \{y \in E / \left\|x - y\right\| < r\}$. On dit que $B(x,r)$ est la boule ouverte de E de centre x et de rayon r.
2. Soit $x \in E$. On appelle voisinage de x dans E toute partie V de E pour laquelle il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$.
3. Soit U une partie de E. On dit que U est un ouvert de E si U est voisinage dans E de chacun de ses points (c.-à.-d. que $U \in \mathscr{V}_E(x)$ pour tout $x \in U$).
4. Soit F une partie de E. On dit que F est un fermé de E si $\complement_E F$ est un ouvert de E.

Notation. On notera $\mathscr{V}_E(x)$ l'ensemble de tous les voisinages de x dans E.

1.2.2 Propriétés des voisinages d'un e.v.r.n.

1.3 Proposition. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé et soit* $x \in E$.

1. *Soit* $V \in \mathscr{V}_E(x)$ *; alors* $x \in V$.
2. *Soient* $V_1, V_2 \in \mathscr{V}_E(x)$ *; alors* $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{V}_E(x)$.
3. *Soit* $V \in \mathscr{V}_E(x)$ *et soit* W *une partie de* E *contenant* V *; alors* $W \in \mathscr{V}_E(x)$.
4. *Soit* $V \in \mathscr{V}_E(x)$ *; alors il existe* $W \in \mathscr{V}_E(x)$ *tel que* $V \in \mathscr{V}_E(y)$ *pour tout* $y \in W$.

Démonstration.

1. Pour tout $r > 0$, on a $x \in B(x,r)$ car $\|x - x\| = 0 < r$.
2. Soient $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que l'on ait $B(x,r_1) \subset V_1$ et $B(x,r_2) \subset V_2$. Posons $r = \min(r_1, r_2)$; alors r est un réel strictement positif tel que $B(x,r) \subset V_1 \cap V_2$.
3. Soit $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$; alors, comme $V \subset W$, on a $B(x,r) \subset W$ et donc $W \in \mathscr{V}_E(x)$.
4. Soit $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$; $B(x,r)$ est un voisinage de x dans E ; le fait que V soit un voisinage de tout élément de $B(x,r)$ résulte du lemme suivant.

□

1.1 Lemme. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé. Soient* $x \in E$ *et* r *un réel strictement positif ; alors* $B(x, r)$ *est un ouvert de* E.

Démonstration. Soit $y \in B(x, r)$; posons $\rho = r - \|x - y\|$; comme $y \in B(x, r)$ on a $\|x - y\| < r$ et donc $\rho > 0$. Montrons que $B(y, \rho) \subset B(x, r)$. Soit $z \in B(y, \rho)$; alors

$$\begin{aligned}\|x - z\| &= \|x - y + y - z\| \\ &\leqslant \|x - y\| + \|y - z\| \\ &< \|x - y\| + (r - \|x - y\|) \\ &< r\end{aligned}$$

Par conséquent $z \in B(x, r)$. □

1.2.3 Propriétés des ouverts d'un e.v.r.n.

1.4 Proposition. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé. Alors :*

1. $\emptyset$ *et* E *sont des ouverts de* E.
2. $\emptyset$ *et* E *sont des fermés de* E.
3. *L'intersection de deux ouverts de* E *est un ouvert de* E.
4. *La réunion de deux fermés de* E *est un fermé de* E.
5. *La réunion d'une famille quelconque d'ouverts de* E *est un ouvert de* E.
6. *L'intersection d'une famille quelconque de fermés de* E *est un fermé de* E.

Démonstration.

1. $\emptyset$ est bien sûr un ouvert de E. Pour tout $x \in E$ on a $B(x, 1) \subset E$ donc E est un ouvert de E.
2. On a $\complement_E \emptyset = E$ et $\complement_E E = \emptyset$. Comme E et $\emptyset$ sont ouverts de E, $\emptyset$ et E sont des fermés de E.
3. Soient U_1 et U_2 deux ouverts de E. Soit $x \in U_1 \cap U_2$. Comme $U_i \in \mathcal{V}_E(x)$ il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset U_i$ $(i = 1, 2)$. Posons $r = \min(r_1, r_2)$; alors $B(x, r) \subset B(x, r_1) \cap B(x, r_2) \subset U_1 \cap U_2$ et par conséquent, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}_E(x)$ ce qui montre que $U_1 \cap U_2$ est un ouvert de E.
4. Soient F_1 et F_2 des fermés de E. On a $\complement_E(F_1 \cup F_2) = \complement_E F_1 \cap \complement_E F_2$. Comme F_i est un fermé, $\complement_E F_i$ est un ouvert et d'après 3, $\complement_E F_1 \cap \complement_E F_2$ est un ouvert ; $F_1 \cup F_2$ est donc un fermé.
5. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts de E. Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$; soit $j \in I$ tel que $x \in U_j$. Comme U_j est un ouvert de E, $U_j \in \mathcal{V}_E(x)$ et comme $U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, on voit que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{V}_E(x)$. Par conséquent, $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de E.
6. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de fermés de E. On a $\complement_E(\bigcap_{i \in I} F_i)$. Comme F_i est un fermé de E, $\complement_E F_i$ est un ouvert de E ; d'après 5, $\bigcup_{i \in I} \complement_E F_i$ est un ouvert de E, et donc $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé de E.

□

1.2.4 Relation entre voisinage et ouvert

1.5 Proposition. *Soit* $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé. Soit* $x \in \mathrm{E}$ *et soit* $\mathrm{V} \subset \mathrm{E}$. *Alors* V *est un voisinage de* x *dans* E *si et seulement s'il existe un ouvert* U *de* E *tel que* $x \in \mathrm{U} \subset \mathrm{V}$.

Démonstration. S'il existe un ouvert U de E tel que $x \in \mathrm{U} \subset \mathrm{V}$, alors $\mathrm{U} \in \mathscr{V}_{\mathrm{E}}(x)$ et comme $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$, V appartient à $\mathscr{V}_{\mathrm{E}}(x)$. Inversement, supposons que $\mathrm{V} \in \mathscr{V}_{\mathrm{E}}(x)$. Alors il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{V}$. Posons $\mathrm{U} = \mathrm{B}(x, r)$, alors U est un ouvert de E (voir 1.1) et $x \in \mathrm{U} \subset \mathrm{V}$. □

1.2.5 Adhérence

1.4 Définition. Soit $(\mathrm{E}, \|.\|)$ un espace vectoriel réel normé. Soit A une partie de E et soit $x \in \mathrm{E}$. On dit que x est adhérent à A si pour tout $\mathrm{V} \in \mathscr{V}_{\mathrm{E}}(x)$ on a $\mathrm{V} \cap \mathrm{A} \neq \emptyset$[2].

On note $\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{E}}$, ou plus simplement $\overline{\mathrm{A}}$, l'ensemble des points x de E adhérents à A. On dit que $\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{E}}$ est l'adhérence de A dans E.

1.2.6 Propriétés de l'adhérence

1.6 Proposition. *Soit* $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé. Soit* A *une partie de* E. *Alors :*

1. *On a* $\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{A}}$.
2. $\overline{\mathrm{A}}$ *est un fermé de* E.
3. *Soit* F *un fermé de* E *tel que* $\mathrm{A} \subset \mathrm{F}$ *; alors* $\overline{\mathrm{A}} \subset \mathrm{F}$.
4. A *est un fermé de* E *si et seulement si* $\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$.

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathrm{A}$. Soit $\mathrm{V} \in \mathscr{V}_{\mathrm{E}}(x)$; on a $x \in \mathrm{V} \cap \mathrm{A}$, donc $\mathrm{V} \cap \mathrm{A} \neq 0$ et par conséquent, $x \in \overline{\mathrm{A}}$.
2. Montrons que $\complement_{\mathrm{E}}\overline{\mathrm{A}}$ est un ouvert de E. Soit $x \in \complement_{\mathrm{E}}\overline{\mathrm{A}}$; il suffit de montrer que $\complement_{\mathrm{E}}\overline{\mathrm{A}} \in \mathscr{V}_{\mathrm{E}}(x)$. Comme $x \notin \overline{\mathrm{A}}$, il existe $\mathrm{V} \in \mathscr{V}_{\mathrm{E}}(x)$ tel que $\mathrm{V} \cap \mathrm{A} = \emptyset$. Soit U un ouvert de E tel que $x \in \mathrm{U} \subset \mathrm{V}$. Montrons que $\mathrm{U} \subset \complement_{\mathrm{E}}\overline{\mathrm{A}}$. Soit $y \in \mathrm{U}$; on a $\mathrm{V} \cap \mathrm{A} = \emptyset$, donc $\mathrm{U} \cap \mathrm{A} = \emptyset$ et comme U est un voisinage de y on voit que $y \notin \overline{\mathrm{A}}$. Comme $x \in \mathrm{U} \subset \complement_{\mathrm{E}}\overline{\mathrm{A}}$ on obtient que $\complement_{\mathrm{E}}\overline{\mathrm{A}} \in \mathscr{V}_{\mathrm{E}}(x)$.
3. Soit $x \in \overline{\mathrm{A}}$. Si x n'appartenait pas à F, alors $\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{F}$ serait un ouvert de E contenant x, donc un voisinage de x et comme $(\complement_{\mathrm{E}}\mathrm{F}) \cap \mathrm{A} = \emptyset$ on a $x \notin \overline{\mathrm{A}}$.
4. Immédiat d'après 1,2 et 3.

□

1.2.7 Exercice

Exercice. Soit E un espace vectoriel réel normé.

1. Soient A, B des parties de E telles que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$; montrer que $\overline{\mathrm{A}} \subset \overline{\mathrm{B}}$.
2. Soient C, D deux parties de E. Montrer que $\overline{\mathrm{C} \cup \mathrm{D}} = \overline{\mathrm{C}} \cup \overline{\mathrm{D}}$.

2. Il est équivalent de dire que $\mathrm{B}(x, r) \cap \mathrm{A} \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$.

1.2.8 Topologie d'un e.v.r.n.

1.5 Définition. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel réel normé. La classe (ou l'ensemble) des ouverts de $(E, \|.\|)$ est appelée la topologie de $(E, \|.\|)$.

1.2.9 Relation entre topologie et normes d'un e.v.r.n.

1.7 Proposition. *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et soient* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *deux normes sur* E*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *définissent la même topologie.*
2. $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *sont équivalentes.*

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$: soit $B_1 = \{x \in E / \|x\|_1 < 1\}$. B_1 est un ouvert de $(E, \|.\|_1)$ (voir 1.1), donc B_1 est un ouvert de $(E, \|.\|_2)$ d'après 1. On a $\|0\|_1 = 0$ donc $0 \in B_1$; B_1 est voisinage de 0 pour $\|.\|_2$, donc il existe un réel $r > 0$ tel que $\{x \in E / \|x\|_2 < r\} \subset B_1$. Soit $x \in E$; si $x \neq 0$, on a

$$\left\| \frac{r}{2\|x\|_2} x \right\|_2 = \frac{r}{2} < r$$

donc

$$\left\| \frac{r}{2\|x\|_2} x \right\|_1 < 1$$

On en déduit que $\|x\|_1 < \frac{2}{r} \|x\|_2$. Posons $\alpha = \frac{2}{r}$; on a $\alpha > 0$ et $\|x\|_1 \leqslant \alpha \|x\|_2$ pour tout $x \in E$.

Par symétrie, il existe $\beta > 0$ tel que $\|.\|_2 \leqslant \beta \|.\|_1$.

$2 \Rightarrow 1$. Soient α et β des réels positifs tels que $\|.\|_1 \leqslant \alpha \|.\|_2$ et $\|.\|_2 \leqslant \beta \|.\|_1$. Soit U un ouvert de $(E, \|.\|_1)$ et soit $x \in U$. Soit $r > 0$ tel que $\{y \in E / \|x - y\|_1 < r\} = A \subset U$. On a $\{y \in E / \|x - y\|_2 < \frac{r}{\alpha}\} = B \subset U$ car $A \subset B$. Donc U est un voisinage de x dans E pour $\|.\|_2$. Par conséquent U est un ouvert de $(E, \|.\|_2)$. Par symétrie, tout ouvert de $(E, \|.\|_2)$ est un ouvert de $(E, \|.\|_1)$. □

Remarque. Les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont toutes équivalentes entre elles ; elles définissent donc la même topologie sur $\mathbb{R}^n$. On dit que c'est la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

1.3 Suites de vecteurs dans un espace normé

1.3.1 Définition

1.6 Définition. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel réel normé. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et soit $x \in E$. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (ou tend) vers x dans E si

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$$

Autrement dit, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$$

On écrit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ (ou $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$) et l'on dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet x comme limite.

1.3.2 Propriétés des limites

1.8 Proposition. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé. Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* E *et soient* $x, y \in E$. *On suppose que* $\lim x_n = x$ *et* $\lim x_n = y$ *; alors* $x = y$.

Démonstration. On a

$$\|x - y\| = \|x - x_n + x_n - y\| \leqslant \|x - x_n\| + \|x_n - y\|$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $\|x - y\| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui implique $\|x - y\| = 0$ et donc $x = y$. □

1.9 Proposition. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé. Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* E*, et soit* $x \in E$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *On a* $\lim x_n = x$.
2. $\forall V \in \mathscr{V}_E(x)$*,* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$*,* $n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n \in V$.

Démonstration. En effet, les boules ouvertes de centre x sont des voisinages de x dans E et tout voisinage de x dans E contient une telle boule. □

1.10 Proposition. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé. Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs de* E *qui converge vers* $x \in E$. *Alors toute sous suite de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge également vers* x.

Démonstration. Soit $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite réelle $(\|x_{n_k} - x\|)_{k\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de la suite réelle $(\|x_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

□

1.3.3 Normes équivalentes et convergence

1.11 Proposition. *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *et soient* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *deux normes sur* E. *On suppose que ces normes sont équivalentes. Alors une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de vecteurs de* E *converge dans* E *vers* $x \in E$ *pour* $\|.\|_1$ *si et seulement si elle converge vers* x *dans* E *pour* $\|.\|_2$.

Démonstration. Immédiat d'après la définition de deux normes équivalentes. On peut aussi s'appuyer sur 1.9. □

1.3.4 Convergence sur $\mathbb{R}^p$

1.7 Définition. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs dans $\mathbb{R}^p$ et soit $x \in \mathbb{R}^p$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour l'une des normes de $\mathbb{R}^p$ (et donc pour toutes, puisqu'elles sont équivalentes).

1.12 Proposition. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $x \in \mathbb{R}^p$. *On a* $x_n = (\alpha_{n1}, \dots, \alpha_{np})$ *et* $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *On a* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
2. *On a* $\lim_{n\to\infty} \alpha_{ni} = \alpha_i$*,* $(i = 1, \dots, p)$.

Démonstration. Munissons $\mathbb{R}^p$ de la norme $(\beta_1, \dots, \beta_p) \to \sum_{i=1}^{p} |\beta_i|$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p} \left|\alpha_{ni} - \alpha_i\right| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \left|\alpha_{ni} - \alpha_i\right| = 0$$

□

1.3.5 Propriétés des limites dans un e.v.r.n.

1.13 Proposition. *Soit* $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé et soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente de vecteurs de* E*. Alors la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée. C'est-à-dire que* $\{\left\|x_n\right\| / n \in \mathbb{N}\}$ *est une partie bornée de* $\mathbb{R}$*.*

Démonstration. Soit $x = \lim x_n$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$ l'on ait $\left\|x_n - x\right\| \leqslant 1$. Si $n \geqslant n_0$ alors

$$\left\|x_n\right\| = \left\|x_n - x + x\right\| \leqslant \left\|x_n - x\right\| + \|x\| \leqslant 1 + \|x\|$$

Posons $\mathrm{M} = \max(\left\|x_0\right\|, \left\|x_1\right\|, \dots, \left\|x_{n_0-1}\right\|, 1+\|x\|)$; alors on a $\left\|x_n\right\| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

1.14 Proposition. *Soit* $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé . Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites dans* E *et* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. On suppose que* $\lim x_n = x$ *et* $\lim y_n = y$ *où* $x, y \in \mathrm{E}$*, et que* $\lim \lambda_n = \lambda \in \mathbb{R}$*. Alors*

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$
2. $\lim(\lambda_n x_n) = \lambda x$
3. $\lim \left\|x_n\right\| = \|x\|$

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$n \geqslant n_1 \Rightarrow \left\|x_n - x\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$n \geqslant n_2 \Rightarrow \left\|y_n - y\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Alors si $n \geqslant n_0$ on a

$$\begin{aligned}\left\|(x_n + y_n) - (x + y)\right\| &= \left\|(x_n - x) + (y_n - y)\right\| \\ &\leqslant \left\|x_n - x\right\| + \left\|y_n - y\right\| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

   Par conséquent $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E vers $(x + y)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\mathrm{A} > 0$ tel que $\|x\| \leqslant \mathrm{A}$ et $|\lambda_n| \leqslant \mathrm{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit n_0 tel que si $n \geqslant n_0$ alors $\left\|x_n - x\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mathrm{A}}$ et $|\lambda_n - \lambda| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mathrm{A}}$. Si $n \geqslant n_0$, alors

$$\begin{aligned}\left\|\lambda_n x_n - \lambda x\right\| &= \left\|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\right\| \\ &\leqslant \left\|\lambda_n x_n - \lambda_n x\right\| + \left\|\lambda_n x - \lambda x\right\| \\ &\leqslant |\lambda_n| \left\|x_n - x\right\| + |\lambda_n - \lambda| \|x\| \\ &\leqslant \mathrm{A}\frac{\varepsilon}{2\mathrm{A}} + \frac{\varepsilon}{2\mathrm{A}}\mathrm{A} = \varepsilon\end{aligned}$$

   Par conséquent $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (λx) dans E.

3. On a $|\left\|x_n\right\| - \|x\|| \leqslant \left\|x_n - x\right\|$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$ alors $\left\|x_n - x\right\| < \varepsilon$. Alors si $n \geqslant n_0$ on a $|\left\|x_n\right\| - \|x\|| < \varepsilon$; autrement dit $\lim \left\|x_n\right\| = \|x\|$.

□

1.3.6 Relation entre adhérence et suites

1.15 Proposition. *Soit* $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé et soit* A *une partie de* E. *Soit* $x \in \mathrm{E}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $x \in \overline{\mathrm{A}}$
2. *Il existe une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de vecteurs de* A *telle que* $\lim x_n = x$.

Démonstration. 1 ⇒ 2. Par définition, on a $\mathrm{V} \cap \mathrm{A} \neq \emptyset$ pour tout $\mathrm{V} \in \mathscr{V}_{\mathrm{E}}(x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{B}(x, \frac{1}{n+1}) \in \mathscr{V}_{\mathrm{E}}(x)$ donc on a $\mathrm{B}(x, \frac{1}{n+1}) \cap \mathrm{A} \neq \emptyset$. Soit $x_n \in \mathrm{B}(x, \frac{1}{n+1}) \cap \mathrm{A}$; alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de A converge dans E vers x car $\left\|x_n - x\right\| < \frac{1}{n+1}$.

2 ⇒ 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de A telle que $\lim x_n = x$. Soit $\mathrm{V} \in \mathscr{V}_{\mathrm{E}}(x)$; comme $\lim x_n = x$, il existe n_0 tel que si $n \geqslant n_0$ alors $x_n \in \mathrm{V}$. On a $x_{n_0} \in \mathrm{V} \cap \mathrm{A}$ donc $\mathrm{V} \cap \mathrm{A} \neq \emptyset$. Par conséquent $x \in \overline{\mathrm{A}}$. □

1.1 Corollaire. *Soit* $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé et soit* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. *Alors* A *est un fermé de* E *si et seulement si tout vecteur de* E *qui est limite d'une suite de points de* A *appartient à* A.

1.4 Suite de Cauchy

1.4.1 Définitions

1.8 Définition. Soit $(\mathrm{E}, \|.\|)$ un espace vectoriel réel normé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall p, q \geqslant n_0 \Rightarrow \left\|x_p - x_q\right\| < \varepsilon$$

Notons que l'on peut supposer $r < s$.

On vérifie facilement que toute suite convergente de vecteurs de E est une suite de Cauchy. Si toutes les suites de Cauchy de vecteurs de E sont convergentes, on dit que $(\mathrm{E}, \|.\|)$ est complet, ou encore que c'est un espace de Banach.

Remarque. Soit E un espace vectoriel réel et soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes équivalentes sur E. Alors pour qu'une suite de vecteurs de E soit une suite de Cauchy pour $\|.\|_1$ il faut et il suffit que ce soit une suite de Cauchy pour $\|.\|_2$.

1.9 Définition. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^p$. On dit que c'est une suite de Cauchy de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ si c'est une suite de Cauchy pour l'une des normes de $\mathbb{R}^p$ (et donc pour toutes).

1.4.2 Suites de Cauchy de $\mathbb{R}^p$

1.16 Proposition. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs de* $\mathbb{R}^p$. *On a* $x_n = (\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{np})$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy.*

2. $(\alpha_{ni})_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy réelle pour* $i = 1, \dots, p$.

Démonstration. Voisine de celle de 1.12 □

1.4.3 Complétude de $\mathbb{R}^p$

1.17 Proposition. $\mathbb{R}^p$ *est complet (pour l'une quelconque de ses normes).*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de vecteurs de $\mathbb{R}^p$. On a $x_n = (\alpha_{n1}, \dots, \alpha_{np})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite réelle $(\alpha_{ni})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy réelle (cf. 1.16), donc elle converge vers un réel α_i $(i = 1, \dots, p)$. Posons $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$; alors d'après 1.12 on a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

1.5 Parties compactes d'un espace normé

1.5.1 Définitions

1.10 Définitions. Soit $(\mathrm{E}, \|.\|)$ un espace vectoriel réel normé.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. On appelle valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E tout vecteur de E qui est limite d'une sous suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point x de E, alors x est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et c'est la seule.
2. Une partie A de E est dite compacte si toute suite de points de A admet dans E une valeur d'adhérence qui appartient à A.
3. Une partie A de E est dite bornée si $\{\|x\| \,/\, x \in \mathrm{A}\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire s'il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que $\|x\| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $x \in \mathrm{A}$.
4. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E est dite bornée si $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

1.5.2 Compacité sur $\mathbb{R}^p$

Remarque. Soit E un espace vectoriel réel norméet soient $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes équivalentes sur E. Alors, les valeurs d'adhérence d'une suite dans E sont les mêmes pour $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$, et les parties compactes (resp. bornées) sont les mêmes pour $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.

Les normes de $\mathbb{R}^p$ étant toutes équivalentes, on peut parler de valeur d'adhérence d'une suite dans $\mathbb{R}^p$ et de parties compactes (resp. bornées) de $\mathbb{R}^p$ sans préciser la norme.

1.5.3 Implications de la compacité

1.18 Proposition. *Soit* $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel norméet soit* A *une partie compacte de* E*. Alors :*

1. A *est un fermé de* E.
2. A *est une partie bornée de* E.

Démonstration. 1. Soit $x \in \overline{\mathrm{A}}$; il suffit de montrer que $x \in \mathrm{A}$ (cf. 1.1). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A telle que $\lim x_n = x$ (cf. 1.15). Alors x est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et c'est la seule. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans A (car A est compact), on a nécessairement $x \in \mathrm{A}$.

2. Supposons que A ne soit pas bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit alors $x_n \in \mathrm{A}$ tel que $\left\|x_n\right\| > n$. Soit $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous suite convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left\|x_{n_k}\right\| > n_k \geqslant k$; la suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas bornée ce qui contredit le fait qu'elle converge.

□

1.5.4 Projections sur $\mathbb{R}^p$ (?)

1.19 Proposition. *Pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$ soit $\pi_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ la i^e projection définie par $\pi_i(x_1,\dots,x_p) = x_i$. Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p$. Alors A est bornée dans $\mathbb{R}^p$ si et seulement si $\pi_i(\mathrm{A})$ est bornée dans $\mathbb{R}$ pour $i = 1,\dots,p$.*

Démonstration. Munissons $\mathbb{R}^p$ de la norme $(\alpha_1,\dots,\alpha_p) \to \sum_{i=1}^p |\alpha_i|$.

1. Supposons A bornée. Soit $\mathrm{M} > 0$ tel que $\|x\| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $x \in \mathrm{A}$. Soit $i \in \{1,\dots,p\}$ et soit $x_i \in \pi_i(\mathrm{A})$. Soit $x \in \mathrm{A}$ tel que $x_i = \pi_i(x)$; on a $|x_i| \leqslant \|x\| \leqslant \mathrm{M}$, et donc $\pi_i(\mathrm{A})$ est bornée dans $\mathbb{R}$.
2. Supposons $\pi_i(\mathrm{A})$ bornée pour $i = 1,\dots,p$. Soit $\mathrm{M}_i > 0$ tel que $|x_i| \leqslant \mathrm{M}_i$ pour tout $x_i \in \pi_i(\mathrm{A})$ $(i = 1,\dots,p)$. Soit $x \in \mathrm{A}$; on a

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{p} \left|\pi_i(x)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \mathrm{M}_i$$

   et par conséquent A est bornée dans $\mathbb{R}^p$.

□

1.5.5 Théorème de Bolzano-Weierstrass

1.1 Théorème (Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de vecteurs de $\mathbb{R}^p$. Alors on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au moins une sous suite convergente. Autrement dit, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet dans $\mathbb{R}^p$ au moins une valeur d'adhérence.*

Démonstration. On procède par récurrence sur p. Si $p = 1$ la propriété est vraie (supposée connue). Supposons la propriété établie jusqu'à $p-1$ $(p \geqslant 2)$; montrons qu'elle est vraie pour p. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathbb{R}^p$. Soit $\pi_p : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ la p^e projection, et soit $\pi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p-1}$ définie par $\pi(x_1,\dots,x_p) = (x_1,\dots,x_{p-1})$. La suite $(\pi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^{p-1}$ est bornée, ainsi que la suite réelle $(\pi_p(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $(\pi(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ une sous suite de $(\pi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un vecteur $(a_1,\dots,a_{p-1})$ de $\mathbb{R}^{p-1}$ et soit $(\pi_p(x_{n_{k_l}}))_{l\in\mathbb{N}}$ une sous suite de $(\pi_p(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un réel a_p. Alors la sous suite $(\pi(x_{n_{k_l}}), \pi_p(x_{n_{k_l}}))_{l\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^p$ vers $(a_1,\dots,a_p)$. □

1.5.6 Parties compactes sur $\mathbb{R}^p$

1.2 Théorème. *Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est une partie compacte de $\mathbb{R}^p$.*
2. *A est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^p$.*

Démonstration. D'après 1.18, 1 implique 2.

Inversement, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de A ; la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc on peut en extraire une sous suite convergeant vers un vecteur x de $\mathbb{R}^p$. Comme A est fermé, x appartient à A. Le point x est donc une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A. Par conséquent A est compact. □

1.6 Continuité

On désigne par $(\mathrm{E}, \|.\|)$ et $(\mathrm{F}, \|.\|)$ deux espaces vectoriels réels normés et par X une partie de E.

1.6.1 Définitions

1.11 Définition. Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{F}$[3] Soit $a \in \mathrm{X}$. On dit que f est continue en a si

$$\forall \mathrm{W} \in \mathscr{V}_{\mathrm{F}}(f(a)), \exists \mathrm{V} \in \mathscr{V}_{\mathrm{E}}(a), f(\mathrm{V} \cap \mathrm{X}) \subset \mathrm{W}$$

Il est équivalent de dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in \mathrm{X} \text{ et } \|x - a\| < \eta) \Rightarrow \left\| f(x) - f(a) \right\| < \varepsilon$$

Si f est continue en tout point de X, on dit que f est continue sur X.

Notons que cette définition ne dépend que des topologies de $(\mathrm{E}, \|.\|)$ et de $(\mathrm{F}, \|.\|)$. On peut, sans changer cette notion, remplacer les normes de E et de F par des normes équivalentes.

Remarque. Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{F}$. Soit $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ et soit g la restriction de f à Y définie par $g(y) = f(y)$ $(y \in \mathrm{F})$. Soit $a \in \mathrm{Y}$; alors si f est continue en a, g est continue en a. La réciproque est bien sûr fausse. En revanche, si Y est de la forme $\mathrm{W} \cap \mathrm{X}$ avec $\mathrm{W} \in \mathscr{V}_{\mathrm{E}}(a)$ et si g est continue en a, alors f est continue en a.

1.6.2 Continuité par applications sur des limites (?)

1.20 Proposition. *Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{F}$ et soit $a \in \mathrm{X}$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de X telle que $\lim x_n = a$ on a $\lim f(x_n) = f(a)$.*

Démonstration.

1. Supposons que f ne soit pas continue en a. Alors on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0, \exists x \in \mathrm{X}, \|x - a\| < \eta \text{ et } \left\| f(x) - f(a) \right\| \geqslant \varepsilon$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in \mathrm{X}$ tel que $\left\| x_n - a \right\| < \frac{1}{n+1}$ et $\left\| f(x_n) - f(a) \right\| \geqslant \varepsilon$. On a alors $\lim x_n = a$ mais $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$.

2. Supposons f continue en a. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X telle que $\lim x_n = a$. Montrons que $\lim f(x_n) = f(a)$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ tels que si $x \in \mathrm{X}$ et si $\|x - a\| < \eta$ alors $\left\| f(x) - f(a) \right\| < \varepsilon$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$ alors $\left\| x_n - a \right\| < \eta$; si $n \geqslant n_0$, on a $\left\| f(x_n) - f(a) \right\| < \varepsilon$ donc $\lim f(x_n) = f(a)$.

□

3. On dit que f est une fonction vectorielle, ou de variable vectorielle.

1.6.3 Continuité des compositions d'applications

1.21 Proposition. *1. Soit $a \in X$. Soient f et g deux applications de X dans F et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soit $\lambda f + \mu g$ l'application de X dans F définie par $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$. On suppose f et g continues en a ; alors $\lambda f + \mu g$ est continue en a.*

2. *L'application $x \mapsto \|x\| : E \to \mathbb{R}$ est continue.*
3. *Soit $f : X \to F$ et soit $g : f(X) \to G$ où $(G, \|.\|)$ est un espace vectoriel réel normé. Soit $a \in X$. On suppose que f est continue en a et que g est continue en $f(a)$; alors $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X telle que $\lim x_n = a$. On a

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(a) &= \lambda f(a) + \mu g(a)\\ &= \lambda f(\lim x_n) + \mu g(\lim x_n)\\ &= \lambda \lim f(x_n) + \mu \lim g(x_n)\\ &= \lim(\lambda f(x_n) + \mu g(x_n))\\ &= \lim(\lambda f + \mu g)(x_n)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a) &= g(f(a))\\ &= g(f(\lim x_n))\\ &= g(\lim f(x_n))\\ &= \lim g(f(x_n))\\ &= \lim(g \circ f)(x_n)\end{aligned}$$

ce qui établit 1 et 3. Pour le 2 il suffit d'utiliser le fait que $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x - y\|$. □

1.6.4 Continuité par composantes

1.22 Proposition. *Soit $f : X \to \mathbb{R}^p$ et soit $f_i = \pi_i \circ f$ où $\pi_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est la i^e projection. Soit $a \in X$. Alors f est continue en a si et seulement si les $\pi_i \circ f$ sont continues en a $(1 \leqslant i \leqslant p)$.*

Démonstration. C'est une conséquence de 1.20 et de 1.12. □

1.7 Compacité et continuité

1.3 Théorème. *Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ des espaces vectoriels réels normés et soit X une partie compacte de E. Soit $f : X \to F$ une application continue sur X. Alors $f(X)$ est une partie compacte de F. En particulier f est bornée.*

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $f(X)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $x_n \in X$ tel que $f(x_n) = y_n$. Comme X est compact, il existe une sous suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in X$ tels que $\lim x_n = x$. Comme f est continue en x on a $\lim f(x_{n_k}) = f(x)$ c'est-à-dire $\lim y_{n_k} = f(x)$ et par conséquent $f(X)$ est compacte.

D'après 1.18, $f(X)$ est une partie bornée de F. □

1.2 Corollaire. *Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé,* X *une partie compacte de* E *et* $f : X \to \mathbb{R}$ *une application continue. Alors* f *est bornée et il existe* $u, v \in X$ *tels que* $f(u) = \inf f(X)$ *et* $f(v) = \sup f(X)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer 1.3 et le lemme suivant. □

1.2 Lemme. *Soit* A *une partie non vide minorée (resp. majorée) de* $\mathbb{R}$. *Alors* $\inf A \in \overline{A}$ *(resp.* $\sup A \in \overline{A}$*).*

1.7.1 Continuité uniforme

1.12 Définition. Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels réels normés et soit X une partie de E. Soit $f : X \to F$. On dit que f est uniformément continue sur X si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x, y \in X \text{ et } \left\|x - y\right\| < \eta) \Rightarrow \left\|f(x) - f(y)\right\| < \varepsilon$$

Cette notion n'est pas modifiée si les normes sont remplacées par des normes équivalentes.

Si f est uniformément continue sur X alors f est continue sur X (réciproque fausse).

1.7.2 Compacité et continuité uniforme

1.4 Théorème. *Soient* $(E, \|.\|)$ *et* $(F, \|.\|)$ *deux espaces vectoriels réels normés, et soit* X *une partie compacte de* E. *Soit* $f : X \to F$ *une application continue. Alors* f *est uniformément continue.*

Démonstration. Supposons que f n'est pas uniformément continue. Soit alors $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0, \exists x, y \in X, \left\|x - y\right\| < \eta \text{ et } \left\|f(x) - f(y)\right\| \geqslant \varepsilon$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient $u_n, v_n \in X$ tels que

$$\left\|u_n - v_n\right\| < \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \left\|f(u_n) - f(v_n)\right\| \geqslant \varepsilon$$

Soit $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous suite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un vecteur v de X. On a

$$\left\|u_{n_k} - v_{n_k}\right\| < \frac{1}{n_k + 1} \leqslant \frac{1}{k+1}$$

On a donc $\lim_{k\to\infty}(u_{n_k} - v_{n_k}) = 0$; ceci implique que $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = v$ (voir 1.21). Comme f est continue, on a

$$\lim_{k\to\infty} f(u_{n_k}) = f(v) \text{ et } \lim_{k\to\infty} f(v_{n_k}) = f(v)$$

et donc

$$\lim_{k\to\infty} (f(u_{n_K}) - f(v_{n_k})) = 0$$

D'où

$$\lim_{k\to\infty} \left\|f(u_{n_k}) - f(v_{n_k})\right\| = 0$$

ce qui contredit le fait que $\left\|f(u_n) - f(v_n)\right\| \geqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

1.8 Continuité et linéarité

1.5 Théorème. *Soient* $(\mathrm{E}, \|.\|)$ *et* $(\mathrm{F}, \|.\|)$ *deux espaces vectoriels normés, et soit* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. f *est continue en* 0.
2. f *est continue sur* E.
3. f *est uniformément continue.*
4. *Il existe* $\mathrm{M} > 0$ *tel que* $\left\|f(x)\right\| \leqslant \mathrm{M}\|x\|$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$.

Démonstration. Si (4) est vérifiée, on a

$$\left\|f(x) - f(y)\right\| = \left\|f(x-y)\right\| \leqslant \mathrm{M}\left\|x-y\right\|$$

pour tous $x, y \in \mathrm{E}$; (3) en découle.

Il est évident que (3) implique (2), et que (2) implique (1). Montrons que (1) implique (4).

Soit $\eta > 0$ tel que si $x \in \mathrm{E}$ et si $\|x\| < \eta$ (c.-à-d. $\|x - 0\| < \eta$), alors $\left\|f(x)\right\| < 1$ (c.-à-d. $\left\|f(x) - f(0)\right\| < 1$). Posons $\mathrm{M} = \frac{2}{\eta}$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Si $x = 0$ alors $\left\|f(x)\right\| = \|0\| = 0 \leqslant \mathrm{M}\|x\|$. Si $x \neq 0$, alors

$$\left\|\frac{\eta}{2\|x\|}x\right\| = \frac{\eta}{2} < \eta$$

donc

$$\left\|f\left(\frac{\eta}{2\|x\|}x\right)\right\| < 1$$

d'où $\left\|f(x)\right\| \leqslant \mathrm{M}\|x\|$. □

1.23 Proposition. *Soit* $(\mathrm{F}, \|.\|)$ *un espace vectoriel réel normé et soit* $f : \mathbb{R}^p \to \mathrm{F}$ *une application linéaire. Alors* f *est continue sur* $\mathbb{R}^p$.

Démonstration. On peut supposer que $\mathbb{R}^p$ est muni de la norme usuelle $\|.\|_1$ (voir 1.11). Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Soit $x \in \mathbb{R}^p$. On a $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, donc

$$\begin{aligned}
\left\|f(x)\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{p} x_i f(e_i)\right\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{p} |x_i| \left\|f(e_i)\right\| \\
&\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \left\|f(e_i)\right\| \sum_{i=1}^{p} |x_i|
\end{aligned}$$

C'est à dire que $\left\|f(x)\right\| \leqslant \mathrm{M}\|x\|$ avec $\mathrm{M} = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \left\|f(e_i)\right\|$. D'après 1.5, f est continue. □

1.9 Applications partielles

1.9.1 Définition

1.13 Définition. Soit X une partie de $\mathbb{R}^p$ et soit $(\mathrm{F}, \|.\|)$ un espace vectoriel réel normé. Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{F}$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathrm{X}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_p^*$, on pose

$$\mathrm{X}_i = \{x_i \in \mathbb{R} / (a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_p) \in \mathrm{X}\}$$

On appelle i^{e} application partielle déduite de f pour tout a l'application $f_i : \mathrm{X}_i \to \mathrm{F}$ définie par

$$f_i(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_p)$$

Supposons que f soit continue en a ; alors pour tout $i \in \mathbb{N}_p^*$, f_i est continue au point a_i de X_i.

Démonstration. Exercice. □

1.9.2 Exemple

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0 \end{cases}$$

Soit f_1 (resp. f_2) la première (resp. la seconde) application partielle de f en 0. On a $f_1 = f_2 = 0$, donc f_1 et f_2 sont continues en 0. Par contre, f n'est pas continue en 0. En effet, soit $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; on a $\lim x_n = 0$. Par contre, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge par vers $f(0, 0)$ car $f(x_n) = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.10 Limites

On désigne par $(\mathrm{E}, \|.\|)$ et $(\mathrm{F}, \|.\|)$ des espaces vectoriels réels normés, et par X une partie de E.

1.10.1 Définition

1.14 Définition. Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{F}$. Soit $a \in \mathrm{E}$ tel que $a \in \overline{\mathrm{X} \setminus \{a\}}$. On dit que $f(x)$ tend vers $l \in \mathrm{F}$, ou bien que $f(x)$ admet l pour limite dans F, quand x tend vers a dans X privé de a si

$$\forall \mathrm{W} \in \mathscr{V}_{\mathrm{F}}(l), \exists \mathrm{V} \in \mathscr{V}_{\mathrm{E}}(a), f(\mathrm{V} \cap (\mathrm{X} \setminus \{a\})) \subset \mathrm{W}$$

Il est équivalent de dire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in \mathrm{X} \setminus \{a\} \text{ et } \|x - a\| < \eta \Rightarrow \left\|f(x) - l\right\| < \varepsilon$$

On écrit alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathrm{X} \setminus \{a\}}} f(x) = l$$

ou encore

$$f(x) \xrightarrow[x\in X\setminus\{a\}]{x\to a} l$$

Cette notion ne dépend que des topologies de $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$, donc n'est pas modifiée si les normes sont équivalentes.

1.10.2 Continuité en un point

1.24 Proposition. *Soit $f : X \to F$ et soit $a \in X$. On suppose que $a \in \overline{X \setminus \{a\}}$. Alors f est continue en a si et seulement si*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X\setminus\{a\}}} f(x) = f(a)$$

Démonstration. Immédiat. □

1.25 Proposition. *Soit $f : X \to F$ une application. Soit $a \in E$ tel que $a \in \overline{X \setminus \{a\}}$. Soit $l \in F$. Alors on a*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X\setminus\{a\}}} f(x) = l$$

si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $X \setminus \{a\}$ telle que $\lim x_n = a$, on a $\lim f(x_n) = n$.

Démonstration. Semblable à celle de 1.20. □

1.10.3 Propriétés des limites

1.26 Proposition. *Soient f et g deux applications de X dans F. Soit $a \in E$ tel que $a \in X \setminus \{a\}$. On suppose que*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X\setminus\{a\}}} f(x) = l, \text{ et } \lim_{\substack{x\to a\\ x\in X\setminus\{a\}}} g(x) = m$$

Alors :

1. *Si $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X\setminus\{a\}}} f(x) = l_1$, on a $l_1 = l$.*
2. *On a $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X\setminus\{a\}}} (f+g)(x) = l + m$.*
3. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X\setminus\{a\}}} (\lambda f)(x) = \lambda l$.*
4. *On a $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X\setminus\{a\}}} \left\|f\right\|(x) = \|l\|$ (en posant $\left\|f\right\|(x) = \left\|f(x)\right\|$).*
5. *Soit $(G, \|.\|)$ un espace vectoriel réel normé et soit $h : f(X) \to G$ une application. Alors :*
   (a) *Si $l \notin f(X)$, si $l \in \overline{f(X)}$ et si $\lim_{\substack{y\to l\\ y\in f(X)}} h(y) = l_1$, on a $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X\setminus\{a\}}} (h \circ f)(x) = l_1$.*
   (b) *Si $l \in f(X)$ et si h est continue en l, on a $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X\setminus\{a\}}} (h \circ f)(x) = h(l)$.*
6. *Supposons que $F = \mathbb{R}^q$ et que pour tout $i \in \mathbb{N}_q^*$, f_i est la i^e composante de f. On a $l = (l_1, \dots, l_q)$. Alors on a $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X\setminus\{a\}}} f(x) = l$ si et seulement si $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in X\setminus\{a\}}} f_i(x) = l_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}_q^*$.*

7. *Supposons que* $\mathrm{E} = \mathbb{R}^p$. *Soit* $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathrm{X}$ *et soit*

$$\mathrm{X}_i = \{x_i \in \mathbb{R} / (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_p) \in \mathrm{X}\}$$

Soit $f_i : \mathrm{X}_i \to \mathrm{F}$ *la* i^e *application partielle associée à* f *au point* a *(voir 1.13). Supposons de plus que* $a_i \in \overline{\mathrm{X}_i \in \{a_i\}}$. *Alors on a* $\lim\limits_{\substack{x_i \to a_i \\ x_i \in \mathrm{X}_i \setminus \{a_i\}}} f_i(x_i) = a_i$, $i \in \mathbb{N}_p^*$.

Démonstration. On peut utiliser 1.25 et des propriétés connues concernant les suites. □

Chapitre 2

Fonctions vectorielles d'une variable réelle

2.1 Dérivation

2.1 Définition. Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^q$ une application dont les composantes sont notées $f_1, \ldots, f_q$. On dit que f est une fonction vectorielle de variable réelle.

1. Soit $t_0 \in \mathrm{J}$. On dit que f est dérivable en t_0 et de dérivée $l = (l_1, \ldots, l_q) \in \mathbb{R}^q$ si pour tout $i \in \mathbb{N}_q^*$, f_i est dérivable en t_0 et de dérivée l_i. La dérivée de f en t_0, si elle existe, est notée $f'(t_0)$ ou encore $\frac{df}{dt}(t_0)$.
2. Si f est dérivable dans J (c.-à-d. en tous points de J), l'application de J dans $\mathbb{R}^q$ qui à t associe $f'(t)$ est notée f', ou $\frac{df}{dt}$, et est appelée la fonction dérivée de f.
   Éventuellement, f' admet à son tour une fonction dérivée, etc. Ces dérivées successives se notent f', f'', ..., $f^{(n)}$, ..., ou bien $\frac{df}{dt}$, $\frac{d^2f}{dt^2}$, ..., $\frac{d^nf}{dt^n}$, ... Les composantes de $f^{(n)}$ sont $f_1^{(n)}, \ldots, f_q^{(n)}$.
   Si f', f'', ..., $f^{(n)}$ existent, on dit que f est n fois dérivable. Si de plus $f^{(n)}$ est continue, on dit que f est n fois continûment dérivable (ou de classe C^n).
   Si f^n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est indéfiniment dérivable (ou de classe C^∞).

2.1.1 Remarque sur la dérivabilité

Remarque. On reprend les notations de 2.1. On vérifie aisément que f est dérivable en t_0 et de dérivée l si et seulement si

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in \mathrm{J} \setminus \{t_0\}}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = l$$

ou encore, si et seulement s'il existe $\varepsilon : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^q$ telle que

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)(l + \varepsilon(t))$$

pour tout $t \in \mathrm{J}$, et avec $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \in \mathrm{J}\setminus\{t_0\}}} \varepsilon(t) = 0$.

2.1.2 Propriétés usuelles

2.1 Proposition. *Soit* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et soient* f *et* g *deux applications de* J *dans* $\mathbb{R}^q$. *Soit* $t_0 \in \mathrm{J}$ *tel que* f *et* g *soient dérivables en* t_0. *Alors*

1. f *est continue en* t_0.
2. $f + g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^q$ *définie par* $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ *est dérivable en* t_0 *et l'on a*
$$(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$$
3. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^q$ *définie par* $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$ *est dérivable en* t_0, *et l'on a*
$$(\lambda f)'(t_0) = \lambda f'(t_0)$$
4. *Soit* $\lambda : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ *dérivable en* t_0 *et soit* $\lambda f : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^q$ *définie par* $(\lambda f)(t) = \lambda(t) f(t)$. *Alors* λf *est dérivable en* t_0 *et l'on a*
$$(\lambda f)'(t_0) = \lambda'(t_0) f(t_0) + \lambda(t_0) f'(t_0)$$
5. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et soit* $\phi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *telle que* $\phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. *Soit* $\alpha_0 \in \mathrm{I}$. *On suppose que* ϕ *est dérivable en* α_0 *et que* f *est dérivable en* $\phi(\alpha_0)$. *Alors* $f \circ \phi$ *est dérivable en* α_0 *et l'on a*
$$(f \circ \phi)'(\alpha_0) = f'(\phi(\alpha_0))\phi'(\alpha_0)$$
6. *Supposons que* f *soit* n *continûment dérivable en* J. *Soit* $t_0 \in \mathrm{J}$. *Alors pour tout* $t \in \mathrm{J}$ *on a*
$$f(t) = f(t_0) + \frac{(t-t_0)}{1!} f'(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!} f^{(n)}(t_0) + (t-t_0)^n \varepsilon(t)$$
où $\varepsilon : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^q$ *est telle que* $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \in \mathrm{J}\setminus\{t_0\}}} \varepsilon(t) = 0$. *C'est la formule de Taylor-Young.*

Démonstration. Exercice. □

Rappel. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le produit scalaire $x.y$ de x par y est défini par

$$x.y = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

Ceci s'étend bien sûr à n.

Le produit vectoriel $x \wedge y$ de x par y est défini par

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

2.2 Proposition. *Soit* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et soient* f *et* g *deux applications de* J *dans* $\mathbb{R}^3$ *dérivables en un point* $t_0 \in \mathrm{J}$. *Alors :*

1. *$f \cdot g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ définie par $(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t)$, $(t \in \mathrm{J})$, est dérivable en t_0 et l'on a*
$$(f \cdot g)'(t_0) = f'(t_0) \cdot g(t_0) + f(t_0) \cdot g'(t_0)$$
On dit que $f \cdot g$ est le produit scalaire de f par g.
2. *L'application $f \wedge g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^3$ définie par $(f \wedge g)(t) = f(t) \wedge g(t)$, $(t \in \mathrm{J})$, est dérivable et l'on a*
$$(f \wedge g)'(t_0) = f'(t_0) \wedge g(t_0) + f(t_0) \wedge g'(t_0)$$
On dit que $f \wedge g$ est le produit vectoriel de f par g.

Démonstration. Exercice. □

2.2 Intégration

2.2 Définition. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^q$ une application continue dont les composantes sont notées $f_1, \ldots, f_q$. Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{J}$. Alors l'intégrale de α à β de f, notée
$$\int_\alpha^\beta f(t)dt$$
est définie par
$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \left(\int_\alpha^\beta f_1(t)dt, \ldots, \int_\alpha^\beta f_q(t)dt\right)$$

2.3 Proposition. *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient f et g des applications continues de J dans $\mathbb{R}^q$. Soient $\alpha, \beta, \lambda \in \mathrm{J}$. Alors :*

1. $$\int_\alpha^\beta (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_\alpha^\beta f(t)dt$$
2. $$\int_\alpha^\beta (f+g)(t)dt = \int_\alpha^\beta f(t) + \int_\alpha^\beta g(t)dt$$
3. *Si $\alpha \leqslant \beta$, on a*
$$\left\| \int_\alpha^\beta f(t)dt \right\| \leqslant \int_\alpha^\beta \|f\|(t)dt$$
où $\|.\|$ est une norme arbitraire sur $\mathbb{R}^q$.

Démonstration. Immédiat pour le 1 et le 2. On admet le 3. □

2.3 Définition. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^q$. On appelle primitive de f toute application $\mathrm{F} : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^q$ dérivable et telle que $\mathrm{F}' = f$. Supposons que f admette une primitive G. Alors les autres primitives de f sont les applications de J dans $\mathbb{R}^q$ de la forme $\mathrm{G} + a$ où a est un vecteur constant arbitrairement fixé dans $\mathbb{R}^q$. Si $t_0 \in \mathrm{J}$ et si $x_0 \in \mathbb{R}^q$ il existe une et une seule primitive de f prenant la valeur x_0 en t_0.

2.1 Théorème. *Soit* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^q$ *continue. Soit* $t_0 \in \mathrm{J}$. *Alors :*

1. *L'application* $t \to \int_{t_0}^{t} f(u)du$ *est une (la) primitive de* f *nulle en* t_0. *Pour cette raison, on désigne souvent par* $\int f(u)du$ *une primitive quelconque de* f.
2. *Soit* F *une primitive quelconque de* f. *Alors pour tous* $\alpha, \beta \in \mathrm{J}$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \mathrm{F}(\beta) - \mathrm{F}(\alpha)$$

Démonstration. Il suffit de considérer les composantes de f. □

2.4 Proposition (Formule du changement de variable)**.** *Soit* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^q$ *une application continue. Soit* I *un intervalle et soit* $\phi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une application continûment dérivable telle que* $\phi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. *Alors*

1. *On a*

$$\left(\int f(t)dt\right) \circ \phi = \int (f \circ \phi)(u)\phi'(u)du$$

donc

2. *Si* $\alpha, \beta \in \mathrm{I}$, *on a*

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \phi)(u)\phi'(u)du$$

Démonstration. Il suffit de considérer les composantes de f. □

2.3 Formule de Taylor

2.2 Théorème (Formule de Taylor à l'ordre n)**.** *Soit* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : \mathrm{J} \to \mathbb{R}^q$ *n fois dérivable. Soit* $t_0 \in \mathrm{J}$. *Alors pour tout* $t \in \mathrm{J}$, *on a*

$$\begin{aligned} f(t) =& f(t_0) + \frac{t - t_0}{1!} f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} f''(t_0) && (2.1)\\ &+ \dots && (2.2)\\ &+ \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u)du && (2.3) \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de considérer les composantes $f_1, \dots, f_q$ de f. □

2.1 Corollaire (Inégalité de Taylor)**.** *Notations de* 2.2. *Munissons* $\mathbb{R}^q$ *d'une norme quelconque* $\|.\|$. *Alors*

$$\mathrm{M} = \sup_{u \text{ entre } t_0 \text{ et } t} \left\{ \left\| f^{(n)}(u) \right\| \right\}$$

est fini et l'on a

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} f^{(k)}(t_0) \right\| \leqslant \mathrm{M} \frac{|t-t_0|^n}{n!}$$

Démonstration. Exercice. □

2.4 Généralisation

On peut introduire les notions considérées en 2.1, 2.2, et en 2.3 en remplaçant $\mathbb{R}^q$ par un espace de Banach quelconque ; les propriétés énoncées restent vraies.

Chapitre 3

Calcul différentiel

3.1 Dérivées partielles

3.1 Définitions. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^q$ une application.

1. Soit $a \in \mathrm{U}$. On a $a = (a_1, \dots, a_p)$. Soit $i \in \mathbb{N}_p^*$ et soit

   $$\mathrm{U}_i = \{x_i \in \mathbb{R}/(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_p) \in \mathrm{U}\}$$

   Soit enfin $f_i : \mathrm{U}_i \to \mathbb{R}^q$ la i^{e} application partielle associée à f en a (cf. 1.13). Comme U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, U_i est un ouvert de $\mathbb{R}$; de plus $a_i \in \mathrm{U}_i$.
   Si f_i est dérivable en a_i, $f_i'(a_i)$ est appelée la dérivée partielle (première) de f par rapport à x_i en a et est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $f'_{x_i}(a)$.

2. Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe pour tout $a \in \mathrm{U}$, l'application de U dans $\mathbb{R}^q$ qui à tout a associe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ou f'_{x_i} et est appelée la (fonction) dérivée partielle (première) de f par rapport à x_i sur U.
   On écrit aussi « $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p)$ sur U » au lieu de « $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sur U ».

3. Soient $i, j \in \mathbb{N}_p^*$. Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur U, ainsi que $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$. Alors $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ est noté $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ou $f''_{x_j x_i}$ et est appelée une dérivée partielle seconde de f sur U. Si $j = i$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}$ se note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, ou $f''_{x_i^2}$.
   Par récurrence, on définit les dérivées partielles d'ordre n sur U (si elles existent). Par définition,

   $$\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_n} \dots \partial x_{j_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{j_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{j_{n-1}} \dots \partial x_{j_1}} \right)$$

4. On dit que f est de classe C^0 sur U si f est continue. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe C^n sur U si f admet sur U des dérivées partielles d'ordre n continues. On dit que f est de classe C^∞ sur U si f est de classe C^n sur U pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. Les énoncés concernant les dérivées de fonctions vectorielles d'une variable réelle donnés en 2.1 et 2.2 permettent d'obtenir des énoncés concernant les dérivées partielles des fonctions vectorielles d'une variable vectorielle.

Par exemple, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et si f et g sont deux applications de U dans $\mathbb{R}^q$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et $\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$ existent pour un certain $a \in \mathrm{U}$, alors

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i}(a)$$

existe et l'on a

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

On en déduit, en raisonnant par récurrence sur n, que si f et g sont de classe C^n sur U, $\lambda f + \mu g$ est aussi de classe C^n sur U.

3.1 Théorème (Schwarz)**.** *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ *une application. Soit* $a \in \mathrm{U}$*. On suppose que* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *existent sur* U *et sont continues en* a*. Alors on a :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Démonstration. On peut supposer $q = 1$, $p = 2$, $i = 1$ et $j = 2$. On a $a = (a_1, a_2)$. Soit $z > 0$ tel que $[a_1 - z, a_1 + z] \times [a_2 - z, a_2 + z] \subset \mathrm{U}$. Soit $(h_1, h_2) \in [-z, z] \times [-z, z]$ avec $h_1 \neq 0$ et $h_2 \neq 0$. Posons

$$u = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, h_2 + a_2) + f(a_1, a_2)$$

Si $h_1 > 0$ (resp. < 0), l'application φ de $[a_1, a_1 + h_1]$ (resp. $[a_1 + h_1, a_1]$) dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x_1) = f(x_1, a_2 + h_2) - f(x_1, a_2)$$

est dérivable. D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc $\theta_1 \in]0, 1[$ tel que

$$\varphi(a_1 + h_1) - \varphi(a_1) = h_1 \varphi'(a_1 + \theta_1 h_1)$$

c'est à dire tel que

$$u = h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2) \right)$$

L'application réelle définie sur le segment d'extrémités a_2 et $a_2 + h_2$ qui à x_2 associe $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, x_2)$ est dérivable et donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta_2 \in]0, 1[$ tel que

$$u = h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + \theta_2 h_2)$$

Par symétrie, $\exists \gamma_1, \gamma_2 \in]0, 1[$ tels que

$$u = h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \gamma_1 h_1, a_2 + \gamma_2 h_2)$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + \theta_2 h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \gamma_1 h_1, a_2 + \gamma_2 h_2)$$

Le membre de gauche (resp. de droite) de cette égalité tend vers $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2)$ (resp. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2)$) lorsque $(h_1, h_2) \to (0,0)$ dans U avec $h_1 \neq 0$ et $h_2 \neq 0$ car $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ (resp. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$) est continue en (a_1, a_2). On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2)$$

□

3.1.1 Conséquences

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^q$ une application de classe C^n sur U. On verra que f est de classe C^r, $\forall r \leqslant n$. D'après 3.1 on a donc

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_n} \dots \partial x_{j_1}} = \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_{\sigma(n)}} \dots \partial x_{j_{\sigma(1)}}}$$

pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ (rappelons que si σ est un produit fini de transpositions de $\{1, \dots, n\}$).

La dérivée partielle d'ordre n de f sur U la plus générale peut donc s'écrire :

$$\frac{\partial^n f}{\partial^{i_p} x_p \dots \partial^{i_1} x_1}$$

avec $i_j \geqslant 0$ et $i_1 + \dots + i_p = n$.

3.2 Différentiabilité

3.2 Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^q$ une application. Soit $a \in \mathrm{U}$. Posons $\mathrm{U}_a = \{h \in \mathbb{R}^p / (a+h) \in \mathrm{U}\}$ (U_a est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ qui contient 0).

1. On dit que f est différentiable en a si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe pour $i = 1, \dots, p$ et si l'on a

   $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathrm{U}_a \setminus \{0\}}} \frac{\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right\|}{\|h\|} = 0$$

   où $h = (h_1, \dots, h_p)$.

   Il est équivalent de dire que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe pour $i = 1, \dots, p$ et qu'il existe $\varepsilon : \mathrm{U}_a \to \mathbb{R}^q$ tel que $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathrm{U}_a \setminus \{0\}}} \varepsilon(h) = 0$ et tel que $\forall h \in \mathrm{U}_a$ l'on ait :

   $$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \|h\|\, \varepsilon(h)$$

2. Supposons f différentiable en a. L'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ qui à tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ associe $\sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est alors notée df_a et est

appelée la différentielle de f en a. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, soit $dx_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par :

$$dx_i(h) = h_i$$

avec $h = (h_1, \dots, h_p)$. On a alors

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{p} dx_i(h) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad (h \in \mathbb{R}^p)$$

ce que l'on écrit brièvement $df_a = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$.

3. Soient $f_1, \dots, f_q$ les composantes de f. Supposons f différentiable au point a ; ce qui équivaut bien sûr à supposer que $f_1, \dots, f_q$ sont différentiables en a. Notons que les composantes de df_a sont alors $(df_1)_a, \dots, (df_q)_a$.
   Munissons $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ de leurs bases canoniques respectives. La matrice de df_a est alors

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leqslant 1 \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

   Cette matrice de $\mathscr{M}_{qp}(\mathbb{R})$ est appelée la matrice jacobienne de f en a ; elle est notée $\mathrm{J}_f(a)$. Si $q = p$, $\det \mathrm{J}_f(a)$ est appelé le jacobien de f en a, noté aussi

$$\frac{\mathrm{D}(f_1, \dots, f_p)}{\mathrm{D}(x_1, \dots, x_p)}(a)$$

Remarque. Les notions introduites en 3.2 ne dépendent pas des normes choisies sur $\mathbb{R}^p$ et sur $\mathbb{R}^q$.

3.1 Proposition. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^q$*. Soit* $a \in \mathrm{U}$*. Supposons qu'il existe une application linéaire* $\mathrm{L} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *et une application* $\varepsilon : \mathrm{U}_a \to \mathbb{R}^q$ *telles que*

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{L}(h) + \|h\| \, \varepsilon(h)$$

pour tout $h \in \mathrm{U}_a$ *et* $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathrm{U}_a \setminus \{0\}}} \varepsilon(h) = 0$*. Alors* f *est différentiable en* a *et* $\mathrm{L} = df_a$*.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existent pour $i = 1, \dots, p$ et que pour tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ l'on a

$$\mathrm{L}(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

ce qui est élémentaire. □

3.2 Proposition. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^q$ *une application. Soit* $a \in \mathrm{U}$*. Supposons* f *différentiable en* a*. Alors* f *est continue en* a*.*

Démonstration. Pour tout $h \in \mathrm{U}_a$, on a

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon : \mathrm{U}_a \to \mathbb{R}^q$ telle que $\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in \mathrm{U}_a\setminus\{0\}}} \varepsilon(h) = 0$. Comme l'application linéaire $df_a : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est continue (voir 1.23), on a $\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in \mathrm{U}_a\setminus\{0\}}} f(a+h) = f(a)$ et donc f est continue en a. □

3.3 Proposition. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et soient* f *et* g *deux applications de* U *dans* $\mathbb{R}^q$ *différentiables en un point donné* $a \in \mathrm{U}$. *Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Alors* $\lambda f + \mu g$ *est différentiable en a et l'on a*

$$d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$$

Démonstration. Pour tout $h \in \mathrm{U}_a$, on a

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)$$

et

$$g(a+h) = g(a) + gg_a(h) + \left\|g\right\|\varepsilon_2(h)$$

avec $\varepsilon_i : \mathrm{U}_a \to \mathbb{R}^q$ telle que $\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in \mathrm{U}_a\setminus\{0\}}} \varepsilon_i(h) = 0$, $i = 1, 2$. Posons $\varepsilon = \lambda\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2$. On a $\varepsilon : \mathrm{U}_a \to \mathbb{R}^q$ telle que $\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in \mathrm{U}_a\setminus\{0\}}} \varepsilon(h) = 0$, et pour tout $h \in \mathrm{U}_a$ on a

$$(\lambda f + \mu g)(a+h) = (\lambda f + \mu g)(a) + (\lambda df_a + \mu dg_a)(h) + \|h\|\,\varepsilon(h)$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer 3.1. □

3.3 Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une application différentiable en un point donné $a \in \mathrm{U}$. Le vecteur $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)) \in \mathbb{R}^p$ est appelé gradient de f en a et noté $(\operatorname{grad} f)(a)$. C'est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^p$ tel que pour tout $h = (h_1, \dots h_p) \in \mathbb{R}^p$ l'on ait

$$df_a(h) = (\operatorname{grad} f)(a)\dot{h} \quad \text{(produit scalaire)}$$

3.4 Proposition. *Soit* U *un ouvert* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^q$ *une application. On suppose que* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *existent sur* U *prou* $i = 1, \dots, p$. *Soit* $a \in \mathrm{U}$. *On suppose que les dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *sont continues en a pour* $i = 1, \dots, p$. *Alors* f *est différentiable en a.*

Démonstration. On peut supposer que $q = 1$ (cf. 3.2). On a $a = (a_1, \dots, a_p)$. Soit $\eta > 0$ tel que $[a_1 - \eta, a_1 + \eta] \times \cdots \times [a_p - \eta, a_p + \eta] \subset \mathrm{U}$. Pour tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in [-\eta, \eta]$, on a

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{p} \big(&f(a_1 + h_1, \dots, a_i + h_i, a_{i+1}, \dots, a_p) \\ &- f(a_1 + h_1, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, a_i, \dots, a_p)\big) \end{aligned}$$

En appliquant le théorème des accroissements finis sur le segment d'extrémités a_i et $a_i + h_i$ à l'application qui à x_i associe

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, x_i, a_i, \dots, a_p)$$

on obtient

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{i=1}^{p}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1+h_1,\dots,a_{i-1}+h_{i-1},a_i+\theta_i h_i,a_{i+1},\dots,a_p) \quad (3.1)$$

avec $\theta_i\in]0,1[$, $i=1,\dots,p$. En utilisant (3.1) et la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en a (pour $i=1,\dots,p$) on voit que l'on a

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in \mathrm{U}_a\setminus\{0\}}}\frac{\left|f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^{p}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right|}{\|h\|}=0$$

en prenant (par exemple) $\|h\|=\max_{i\in\mathbb{N}_p^*}|h_i|$. □

3.4 Définitions. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $f:\mathrm{U}\to\mathbb{R}^q$ une application.

1. On dit que f est différentiable sur U si f est différentiable en tout point de U. L'application de U dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$ qui à tout a de U associe df_a est alors notée df et est appelée l'application différentielle de f. On écrit

$$df(x_1,\dots,x_p)=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_p)$$

sur U, ou encore

$$df=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

2. Si f est de classe C^1 sur U, alors d'après 3.4 f est différentiable sur U. Les applications de U dans $\mathbb{R}^q$ de classe C^1 sur U sont dites continûment différentiables sur U. Plus généralement, on dira que les applications de U dans $\mathbb{R}^q$ de classe C^n sur U sont n fois continûment différentiables sur U ($n\in\mathbb{N}$).
3. Si f est de classe C^n sur U ($n\in\mathbb{N}^*$), alors f est de classe $\mathrm{C}^0,\mathrm{C}^1,\dots,\mathrm{C}^{n-1}$ sur U. (cf. 3.4 et 3.2).

3.3 Composition

3.5 Proposition. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f:\mathrm{U}\to\mathbb{R}^q$ *une application. Soit* V *un ouvert de* $\mathbb{R}^q$ *tel que* $f(\mathrm{U})\subset\mathrm{V}$ *et soit* $g:\mathrm{V}\to\mathbb{R}^n$ *une application. Soit* $a\in\mathrm{U}$*. On suppose que* f *est différentiable en* a *et que* g *l'est en* $f(a)$*. Alors :*

1. $g\circ f$ *est différentiable en* a *et l'on a*

$$d(g\circ f)_a=d(g)_{f(a)}\circ df_a$$

2. *On a* $\mathrm{J}_{g\circ f}(a)=\mathrm{J}_g(f(a))\mathrm{J}_f(a)$ *(produit de matrices).*

Démonstration. 1. Pour tout $h\in\mathrm{U}_a$, on a

$$f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\|h\|\,\varepsilon_1(h)$$

avec $\varepsilon_1:\mathrm{U}_a\to\mathbb{R}^q$ telle que $\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathrm{U}_a\setminus\{0\}}}\varepsilon_1(h)=0$. Posons $b=f(a)$. Pour tout $k\in\mathrm{V}_b$ on a

$$g(b+k)=g(b)+dg_b(k)+\|k\|\,\varepsilon_2(k)$$

avec $\varepsilon_2 : \mathrm{V}_b \to \mathrm{R}^n$ telle que $\lim_{\substack{k\to 0\\ k\in \mathrm{V}_b\setminus\{0\}}} \varepsilon_2(k) = 0$. On a

$$(g\circ f)(a+h) = (g\circ f)(a) + (dg_b \circ df_a)(h) + \|h\|\,\varepsilon_3(h)$$

pour tout $h \in \mathrm{U}$, en posant :

$$\varepsilon_3(h) = dg_b(\varepsilon_1(h)) + \left\| df_a\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \varepsilon_1(h)\right\| \varepsilon_2(df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h))$$

Il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que

$$\left\| df_a\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right\| \leqslant \mathrm{M}$$

pour tout $h \in \mathrm{U}_a \setminus \{0\}$ (voir 1.5).
Comme $\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in \mathrm{U}_a\setminus\{0\}}} \varepsilon_1(h) = 0$, on a $\varepsilon_1(h) \leqslant 1$ pour $\|h\|$ assez petit et strictement positif. On a donc

$$\left\| df_a\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \varepsilon_1(h)\right\| \leqslant \mathrm{M}+1$$

pour $\|h\| > 0$ assez petit. On voit alors facilement en utilisant le fait que df_a et dg_b sont continues que $\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in \mathrm{U}_a\setminus\{0\}}} \varepsilon_3(h) = 0$. On conclut en utilisant 3.1.

2. Conséquence du 1.

□

3.1 Corollaire. *On reprend les notations de 3.5. Soient $f_1, \dots, f_q$ les composantes de f et soient $g_1, \dots, g_n$ celles de g. Alors la i*ᵉ *coordonnée de $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a)$ est*

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

pour $i \in \mathbb{N}_n^*$ et $j \in \mathbb{N}_p^*$.

Démonstration. Il suffit de considérer l'égalité matricielle

$$\mathrm{J}_{g\circ f}(a) = \mathrm{J}_g(f(a))\mathrm{J}_f(a)$$

□

3.2 Corollaire. *Notations de 3.5 et 3.1. Pour simplifier, supposons que $n = 1$ (pour n quelconque, on applique ce qui suit à chacune des composantes $g_i \circ f$ de $g\circ f$). Posons $b = f(a)$. Alors on a*

$$dg_b = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial y_k}(b)dy_k$$

$$(df_k)_a = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)dx_j$$

$$d(g\circ f)_a = \sum_{k=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))(df_k)_a$$

Démonstration. Conséquence de 3.1. □

3.3 Corollaire. *Reprenons les notations de 3.5. Supposons f de classe C^m sur U et g de classe C^m sur V. Alors $g \circ f$ est de classe C^m sur U.*

Démonstration. Conséquence de 3.1. □

3.6 Proposition. *1. On a $d(xy) = xdy + ydx$ sur $\mathbb{R}^2$ et $d(\frac{x}{y}) = \frac{ydx-xdy}{y^2}$ sur $\mathbb{R} \times \mathrm{R}^*$.*

2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $a \in \mathrm{U}$. Soient f et g des applications de U dans $\mathbb{R}$ différentiables en a. Alors :

(a) fg est différentiable en a et $d(fg)_a = f(a)dg_a + g(a)df_a$.

(b) Supposons que g ne prenne pas la valeur 0 sur U. Alors $\frac{f}{g}$ est différentiable en a et

$$d(\frac{f}{g})_a = \frac{g(a)df_a - f(a)dg_a}{(g(a))^2}$$

Démonstration. 1. Immédiat.

2. (a) Soit $\phi : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x) = (f(x), g(x))$ et soit $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(u, v) = uv$. On a $fg = \theta \circ \phi$. Appliquons 3.2. On a

$$d\theta_{(u,v)} = vau + udv$$

donc $d(fg)_a = g(a)df_a + f(a)dg_a$.

(b) Exercice.

□

3.4 Fonctions implicites

On admet le théorème suivant, connu sous le nom de théorème des fonctions implicites.

3.2 Théorème. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{p+1}$ et soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Soit $a \in \mathrm{U}$. On a $a = (a_1, \dots, a_p, a_{p+1})$. Supposons que $f(a) = 0$ et que $\frac{\partial f}{\partial x_{p+1}}(a) \neq 0$. Alors il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}$ tous strictement positifs tels que :*

1. Pour tous $x_1 \in]a_1 - \alpha_1, a_1 + \alpha_1[$, …, $x_p \in]a_p - \alpha_p, a_p + \alpha_p[$, l'équation en x_{p+1} :

$$f(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) = 0 \qquad (\varepsilon)$$

admet une solution et une seule dans $]a_{p+1} - \alpha_{p+1}, a_{p+1} + \alpha_{p+1}[$.

2. L'application

$$\varphi :]a_1 - \alpha_1, a_1 + \alpha_1[\times \cdots \times]a_p - \alpha_p, a_p + \alpha_p[\to \mathbb{R}$$

qui à $(x_1, \dots, x_p, x_{p+1})$ associe l'unique solution de (ε) dans $]a_{p+1} - \alpha_{p+1}, a_{p+1} + \alpha_{p+1}[$ est de classe C^1.

3. *On a*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_p) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_p,\varphi(x_1,\dots,x_p))}{\frac{\partial f}{\partial x_{p+1}}(x_1,\dots,x_p,\varphi(x_1,\dots,x_p))}$$

$i \in \mathbb{N}_p^*$.

3.5 Formules des accroissements finis et de Taylor

3.5 Définitions. 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}^p$. On appelle segment de $[a,b]$ de $\mathbb{R}^p$ d'ensemble des $x \in \mathbb{R}^p$ de la forme

$$x = (1-\lambda)a + \lambda b$$

où $\lambda \in [0,1]$.

2. Une partie A de $\mathbb{R}^p$ est dite convexe si pour tous $a, b \in$ A, on a $[a,b] \subset$ A.

3.3 Théorème (Formule des accroissements finis)**.** *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *une application différentiable sur* U. *Soit* $x = (x_1,\dots,x_p) \in \mathrm{U}$ *et soit* $h = (h_1,\dots,h_p) \in \mathbb{R}^p$ *tel que* $[x, x+h] \subset \mathrm{U}$. *Alors il existe un réel* $\theta \in]0,1[$ *tel que*

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h)$$

Démonstration. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}^p$ définie par $g(t) = x + th$. On a $g([0,1]) = [x, x+h] \subset$ U. L'application $f \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dérivable ; il existe donc $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\frac{(f\circ g)(1) - (f \circ g)(0)}{1-0} = (f\circ g)'(\theta)$$

Autrement dit, tel que

$$f(x+h) - f(x) = (f\circ g)'(\theta)$$

D'après 3.1,

$$(f\circ g)'(\theta) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\theta))\frac{dg_i}{dt}(\theta)$$

où $g_1,\dots,g_p$ sont les composantes de g. Le résultat est alors immédiat car

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\theta)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h)$$

et

$$\frac{dg_i}{dt}(\theta) = h_i$$

□

3.6 Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On dit que U est connexe si pour tous $a, b \in$ U, il existe une suite finie $x_1,\dots,x_n \in$ U telle que $x_1 = a$, $x_n = b$ et $[x_i, x_{i+1}] \subset$ U $(i = 1,\dots,n-1)$.

Si U est convexe, alors U est connexe.

3.7 Proposition. *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^q$ *une application différentiable. Alors* f *est constante sur* U *si et seulement si sa différentielle* df *sur* U *est nulle (autrement dit, si et seulement si on a)* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p) = 0$ *sur* U *pour* $i = 1, \dots, p$.

Démonstration. La condition est bien sûr nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. On peut supposer que $q = 1$.

1. Soient $x, y \in \mathrm{U}$ tels que $[x, y] \subset \mathrm{U}$. D'après 3.3, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que
$$f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta h)$$
en posant $h = y - x = (h_1, \dots, h_p)$. On a $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ sur U, donc on a $f(x) = f(y)$.
2. Soient $a, b \in \mathrm{U}$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{U}$ tels que $x_1 = a$, $x_n = b$ et $[x_i, x_{i+1}] \in \mathrm{U}$. D'après 1, on a $f(x_i) = f(x_{i+1})$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$, d'où $f(a) = f(b)$.

□

3.4 Théorème (Formule de Taylor)**.** *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *une application de classe* C^n *sur* U. *Soit* $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathrm{U}$ *et soit* $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ *tel que* $[x, x+h] \subset \mathrm{U}$. *Alors il existe* $\theta \in]0, 1[$ *tel que*
$$\begin{aligned} f(x+h) = & f(x) + \mathrm{S}(x) + \frac{1}{2!}[\mathrm{S}(x)]^{[2]} \\ & + \dots + \frac{1}{(n-1)!}[\mathrm{S}(x)]^{[n-1]} + \frac{1}{n!}[\mathrm{S}(x + \theta h)]^{[n]} \end{aligned}$$
où
$$\mathrm{S}(a) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$
et où $[\mathrm{S}(a)]^{[k]}$ *se développe comme le polynôme*
$$\left(\sum_{i=1}^{p} h_i \mathrm{X}_i \right)^k$$
tout terme $\mathrm{X}_1^{\alpha_1} \mathrm{X}_2^{\alpha_2} \dots \mathrm{X}_p^{\alpha_p}$ *étant remplacé par*
$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}(a)$$
$\alpha_1, \dots, \alpha_p$ *sont des entiers compris entre* 0 *et* k *et tels que* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = k$.

Démonstration. Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^p$ définie par $g(t) = x + th$. On a $g([0, 1]) = [x, x+h] \subset \mathrm{U}$. L'application $f \circ g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est de classe C^n. Il existe donc $\theta \in]0, 1[$ tel que
$$\begin{aligned} (f \circ g)(1) = & (f \circ g)(0) + (f \circ g)'(0) + \frac{1}{2!}(f \circ g)''(0) \\ & + \dots + \frac{1}{(n-1)!}(f \circ g)^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!}(f \circ g)^{(n)}(\theta) \end{aligned}$$

En utilisant 3.1 de manière répétitive, on voit que

$$(f \circ g)^{(k)}(t) = [\mathrm{S}(g(t))]^{[k]}$$

pour $k = 1, \ldots, n$.

Ceci se vérifie en procédant par récurrence sur k, en utilisant la formule de Leibniz. □

3.4 Corollaire. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *une application de classe* C^n *sur* U. *Soit* $a \in \mathrm{U}$. *Alors pour tout* $h \in \mathrm{U}_a$, *on a*

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{S}(a) + \frac{1}{2!}[\mathrm{S}(a)]^{[2]} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}[\mathrm{S}(a)]^{[n-1]} + \|h\|^n \varepsilon(h)$$

où

$$\mathrm{S}(a) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

et $\varepsilon : \mathrm{U}_a \to \mathbb{R}$ *est telle que* $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathrm{U}_a \setminus \{0\}}} \varepsilon(h) = 0$.

3.6 Extremums des fonctions à valeurs réelles

Dans tout 3.6, U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est une application et a est un élément de U.

3.7 Définitions. On dit que a est un maximum (resp. minimum) relatif de f s'il existe un réel $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(a, r) \subset \mathrm{U}$ et tel que si $x \in \mathrm{B}(a, r)$ alors on a $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $\geqslant$).

On dit que a est un extremum relatif de f si a est un maximum relatif ou un minimum relatif de f.

Si les inégalités précédentes sont strictes (pour $x \neq a$) on parle de maximum (resp. minimum, resp. extremum) relatif strict.

3.8 Proposition. *Supposons que* a *soit un extremum relatif de* f. *Alors, si* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ *existe, on a* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ *pour* $i = 1, \ldots, p$.

En particulier, si f *est différentiable en* a, *on a* $df_a = 0$.

Démonstration. Immédiat. □

Remarque. Si f est différentiable en a, et si $df_a = 0$, on dit que a est un point critique de f.

3.6.1 Condition suffisante pour que a soit un extremum relatif

Supposons que f soit de classe C^2 sur U. Soit $q_a : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par :

$$q_a(h_1, \ldots, h_p) = \sum_{i=1}^{p} h_i^2 \frac{\partial f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} h_i h_j \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

Posons $h = (h_1, \ldots, h_p)$. On dit que q_a est positive (resp. négative) si $q_a(h) \geqslant 0$ (resp. $q_a(h) \leqslant 0$) pour tout h de $\mathbb{R}^p$. Si les inégalités sont strictes pour tout h non nul, on dit que q_a est positive (resp. négative) non dégénérée, ou encore que q_a est définie positive (resp. négative).

3.9 Proposition. *Supposons que l'on ait* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ *pour* $i \in \mathbb{N}_p^*$*. Alors :*

1. *Si* q_a *est positive non dégénérée,* a *est un minimum relatif strict de* f*.*
2. *Si* q_a *est négative non dégénérée,* a *est un maximum relatif strict de* f*.*
3. *S'il existe* $h, l \in \mathbb{R}^p$ *tels que* $q_a(h) > 0$ *et* $q_a(h) < 0$*,* a *n'est pas un extremum relatif de* f*.*
4. *Si* q_a *est positive (resp. négative) dégénérée, il y a doute.*

Démonstration. Démontrons le 1. On suppose donc que q_a est positive non dégénérée. D'après 3.4, on a pour tout $h \in \mathrm{U}_a$,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} q_a(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon : \mathrm{U}_a \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathrm{U}_a \setminus \{0\}}} \varepsilon(h) = 0$. On a donc, pour tout $h \in \mathrm{U}_a \setminus \{0\}$,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\|h\|^2}{2} q_a\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

Soit $\mathrm{S} = \{u \in \mathbb{R}^p / \|u\| = 1\}$; S est un compact de $\mathbb{R}^p$. Soit $\varphi : \mathrm{S} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(u) = q_a(u)$. φ est continue sur le compact S et à valeur dans $\mathbb{R}$, donc il existe $u_0 \in \mathrm{S}$ tel que $\inf\{q_a(u)/u \in \mathrm{S}\} = q_a(u_0) > 0$ (cf. 1.2). Soit r un réel strictement positif tel que si $h \in \mathrm{U}_a \setminus \{0\}$ et si $\|h\| < r$ alors

$$|\varepsilon(h)| \leqslant \frac{q_a(u_0)}{4}$$

On peut supposer que $\mathrm{B}(a, r) \subset \mathrm{U}$. Alors si $x \in \mathrm{B}(a, r)$, et si $x \neq a$, on a, en posant $h = x - a$:

$$f(x) - f(a) = f(a+h) - f(a) \geqslant \|h\|^2 \frac{q_a(u_0)}{4} > 0$$

Par conséquent, a est un minimum relatif strict de f.

Aux étudiants les 2, 3 et 4. □

3.5 Corollaire. *Supposons que* $p = 2$ *et que* $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$*. Posons* $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$*,* $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ *et* $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$*. Alors :*

1. *Si* $s^2 - rt < 0$ *et si* $r > 0$*,* a *est un minimum relatif strict de* f*.*
2. *Si* $s^2 - rt < 0$ *et si* $r < 0$*,* a *est un maximum relatif strict de* f*.*
3. *Si* $s^2 - rt > 0$*,* a *n'est pas un extremum de* f*.*
4. *Si* $s^2 - rt = 0$*, il y a doute.*

3.7 Difféomorphisme

3.5 Théorème. *Soient* U *et* V *des ouverts de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *bijective. On suppose que* f *et* f^{-1} *sont continues*[1]*. Soit* $a \in \mathrm{U}$*. On suppose que* f *est différentiable en* a *et que* $df_a : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ *est bijective (autrement dit, on suppose que* $\frac{\mathrm{D}(f_1,\ldots,f_p)}{\mathrm{D}(x_1,\ldots,x_p)} \neq 0$ *où* $f_1, \ldots, f_p$ *sont les composantes de* f*).*

Alors $f^{-1} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ *est différentiable en* $b = f(a)$ *et* $d(f^{-1})_b = (df_a)^{-1}$*.*

1. On dit alors que f est un homéomorphisme de U sur V.

Démonstration. Admis. □

3.6 Théorème. *Soient* U *et* V *deux ouverts de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *un homéomorphisme. Soit* $k \in \mathbb{N}^*$*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. f *est de classe* C^k *sur* U *et* f^{-1} *est de classe* C^k *sur* V*. (On dit alors que* f *est un* C^k*-difféomorphisme de* U *sur* V*).*
2. f *est de classe* C^k *sur* U *et pour tout* $a \in \mathrm{U}$*, l'application linéaire* $df_a : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ *est bijective.*

Démonstration. Exercice (utiliser 3.5). □

3.7 Théorème (Théorème d'inversion locale)**.** *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ *une application de classe* C^1*. Soit* $a \in \mathrm{U}$*. On suppose que l'application linéaire* $df_a : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ *est bijective. Alors il existe un voisinage ouvert* U_1 *de* a *inclus dans* U*, et un voisinage ouvert* V_1 *de* $f(a)$ *tels que « la restriction » de* f *à* U_1 *soit un* C^1*-difféomorphisme de* U_1 *sur* V_1*.*

Démonstration. Admis. □

3.8 Théorème. *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$*. Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ *injective et de classe* C^k*. On suppose que pour tout* $a \in \mathrm{U}$*, l'application linéaire* $df_a : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ *est bijective. Alors* $f(\mathrm{U})$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et « la restriction » de* f *à* U *est un* C^k*-difféomorphisme de* U *sur* $f(\mathrm{U})$*.*

Démonstration. Exercice (utiliser 3.7 puis 3.6). □

Chapitre 4

Calcul intégral

4.1 Forme différentielle de degré 1

4.1 Définitions. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On appelle forme différentielle (de degré 1) sur U toute application de U dans le dual $(\mathbb{R}^p)^*$ de $\mathbb{R}^p$. Désignons par ω une forme différentielle sur U. Pour tout $x \in \mathrm{U}$, $\omega(x) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

1. Pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$, soit $dx_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $dx_i(h_1,\ldots,h_p) = h_i$. Il est immédiat que $(dx_1,\ldots,dx_p)$ est une base de $(\mathbb{R}^p)^*$. Soit $\mathrm{P}_i : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ la i^{e} fonction coordonnée de ω par rapport à la base $(dx_1,\ldots,dx_p)$ de $(\mathbb{R}^p)^*$.

   Pour tout $x \in \mathrm{U}$, on a donc par définition $\omega(x) = \sum_{i=1}^p \mathrm{P}_i(x)dx_i$. On écrit brièvement $\omega = \sum_{i=1}^p \mathrm{P}_i dx_i$. Si $p = 2$, on écrit souvent $\omega = \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy$, si $p = 3$ on écrit souvent $\omega = \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz$.
2. On dit que la forme différentielle sur U, $\omega = \sum_{i=1}^p \mathrm{P}_i dx_i$ est de classe C^k (resp. C^∞) si $\mathrm{P}_i : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est de classe C^k (resp. C^∞) pour $i = 1,\ldots,p$.

   Si ω est de classe C^0, c'est à dire si P_i est continue ($i = 1,\ldots,p$), on dit que ω est continue.

   On note $\Omega^k(\mathrm{U})$ (resp. $\Omega^\infty(\mathrm{U})$) l'ensemble des formes différentielles de classe C^k (resp. C^∞) sur U.

Exemples. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ différentiable. Alors $df : \mathrm{U} \to (\mathbb{R}^p)^*$ est une forme différentielle sur U.

4.2 Définitions.
1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit ω une forme différentielle sur U. On dit que ω est exacte sur U s'il existe une application $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ différentiable sur U telle que $df = \omega$. On dit alors que f est une primitive de ω sur U.
2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit ω une forme différentielle de classe C^1 sur U. On a $\omega = \sum_{i=1}^p \mathrm{P}_i dx_i$. On dit que ω est fermée sur U si, pour tous $i, j \in \mathbb{N}_p^*$, on a
$$\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathrm{P}_j}{\partial x_i}$$

4.1 Proposition. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* ω *une forme différentielle de classe* C^1 *sur* U. *On suppose que* ω *est exacte sur* U. *Alors* ω *est fermée sur* U.

Démonstration. On a $\omega = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{P}_i dx_i$. Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une primitive de ω sur U. Soient $i, j \in \mathbb{N}_p^*$. On a $\mathrm{P}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ et $\mathrm{P}_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$. On a donc

$$\frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \mathrm{P}_j}{\partial x_i}$$

□

4.3 Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \mathrm{U}$. On dit que U est étoilé par rapport à a si l'on a $[a, x] \subset \mathrm{U}$ pour tout $x \in \mathrm{U}$.

On dit que U est étoilé si U est étoilé par rapport à au moins l'un de ses points.

Notons que l'on a U convexe ⇒ U est étoilé ⇒ U connexe.

4.1 Théorème (Poincaré)**.** *Soit* U *un ouvert étoilé de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* ω *une forme différentielle de classe* C^1 *sur* U*. Alors* ω *est exacte sur* U *si et seulement si* ω *est fermée sur* U.

Démonstration. Si ω est exacte sur U, ω est fermée sur U d'après 4.1.

Supposons ω fermée. Montrons que ω est exacte. On peut supposer, quitte à effectuer sur U une translation, que $0 \in \mathrm{U}$ et que U est étoilé par rapport à 0. On a $\omega = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{P}_i dx_i$.

Soit $\varphi : \mathrm{U} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, t) = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathrm{P}_i(tx)$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathrm{U}$ et tout $t \in [0, 1]$. Noter que $tx \in [0, x] \subset \mathrm{U}$.

φ est continue et pour tout $t \in [0, 1]$, l'application partielle $\varphi_t : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$ est de classe C^1 sur U.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_p^*$, on a

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_i}(x) = \mathrm{P}_i(tx) + \sum_{i=1}^{p} tx_j \frac{\partial \mathrm{P}_j}{\partial x_i}(tx)$$

La forme différentielle ω est fermée sur U, donc on a

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_i}(x) = \frac{d(t\mathrm{P}_i(tx))}{dt}$$

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^1 \varphi_t(x) dt$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_i}(x) dt \\ &= \left[t\mathrm{P}_i(tx)\right]_0^1 \\ &= \mathrm{P}_i(x)\end{aligned}$$

□

4.2 Proposition. *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* ω *une forme différentielle exacte sur* U*. Soit* f *une primitive de* ω *sur* U*. Soit* $g : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$*. Alors* g *est une primitive de* ω *sur* U *si et seulement si* $f - g$ *est une application constante sur* U.

Démonstration. Conséquence de 3.7 et 3.3. □

4.2 Intégrales curvilignes

4.4 Définitions. On appelle chemin de $\mathbb{R}^p$ de classe C^1 par morceaux toute application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ ayant la propriété suivante : il existe $a_0,\dots,a_n \in [a,b]$ tels que $a_0 = a$, $a_n = b$, $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ et la restriction de γ à $[a_i, a_{i+1}]$ est continûment dérivable pour $i = 0,\dots,n-1$. Notons que γ est nécessairement continue.

On dit que $\gamma([a,b])$ est le support de γ, et que $\gamma(a)$ (resp. $\gamma(b)$) est l'origine (resp. l'extrémité) de γ. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ on dit que γ est fermé.

4.5 Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $\omega = \sum_{i=1}^{p} P_i dx_i$ une forme différentielle continue sur U. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ un chemin de $\mathbb{R}^p$ de classe C^1 par morceaux tel que $\gamma([a,b]) \subset U$.

On appelle intégrale curviligne de ω le long de γ le nombre réel noté $\int_\gamma \omega$ défini par :

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} < \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt \tag{4.1}$$

où $< \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) >$ est la valeur de la forme linéaire $\omega(\gamma(t))$ en $\gamma'(t)$, et où $a = a_0 < a_1 \dots < a_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à γ comme en 4.4. Il n'y a pas unicité d'une telle subdivision, mais toutes donnent la même valeur.

Remarques. 1. Reprenons les notations de 4.5 et désignons par $\gamma_1,\dots,\gamma_p$ les composantes de γ. On a

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} < \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\sum_{j=1}^{p} P_j(\gamma_1(t),\dots,\gamma_p(t))\gamma_j'(t) \right) dt$$

2. Le second membre de l'égalité (4.1) est en fait

$$\int_a^b < \omega(t), \gamma'(t) > dt$$

4.3 Proposition. *Notations de 4.5. Soit $c \in [a,b]$. Soient $\gamma_{a,c}$ la restriction de γ à $[a,c]$, $\gamma_{c,b}$ la restriction de γ à $[c,b]$ et $\gamma_{a,b} = \gamma$. Alors on a*

$$\int_{\gamma_{a,b}} \omega = \int_{\gamma_{a,c}} \omega + \int_{\gamma_{c,b}} \omega$$

Démonstration. Immédiat. □

4.2 Théorème. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit ω une forme différentielle exacte continue sur U. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ un chemin de $\mathbb{R}^p$ de classe C^1 par morceaux tel que $\gamma([a,b]) \subset U$. Soit $A = \gamma(a)$ (resp. $B = \gamma(b)$) l'origine (resp. l'extrémité) de γ. Soit f une primitive de ω sur U. Alors on a*

$$\int_\gamma \omega = f(B) - f(A)$$

Démonstration. On peut supposer que γ est de classe C^1. On a alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_a^b < \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt \\ &= \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt \\ &= \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)dt \\ &= (f\circ\gamma)(b) - (f\circ\gamma)(a) \\ &= f(B) - f(A)\end{aligned}$$

□

4.1 Corollaire. *Même notation qu'en 4.2. On suppose γ fermé. Alors on a*

$$\int_\gamma \omega = 0$$

4.4 Proposition. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit γ un chemin de $\mathbb{R}^p$ de classe C^1 par morceaux dont le support est inclus dans U. Alors si ω_1 et ω_2 sont des formes différentielles continues sur U, et si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_\gamma (\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2) = \alpha_1 \int_\gamma \omega_1 + \alpha_2 \int_\gamma \omega_2$$

Démonstration. Immédiat. □

4.5 Proposition. *Soient $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^p$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^p$ deux chemins de $\mathbb{R}^p$ de classe C^1 par morceaux. On suppose qu'il existe une bijection $\theta : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ telle que θ et θ^{-1} soient continûment dérivables.*

On dit alors que γ_1 et γ_2 sont équivalents. Notons que γ_1 et γ_2 ont alors le même support.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant le support de γ_1 et γ_2 et soit ω une forme différentielle continue sur U. Alors :

1. *Si θ est croissante, on dit alors que γ_1 et γ_2 ont la même orientation, et on a*
$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$
2. *Si θ est décroissante, on dit alors que γ_1 et γ_2 ont des orientations opposées, et on a*
$$\int_{\gamma_1} \omega = -\int_{\gamma_2} \omega$$

Remarques. Notations précédentes (4.5).

1. θ est toujours croissante ou décroissante.
2. Soit $\gamma_1^- : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^p$ définie par $\gamma_1^-(t) = \gamma_1(a_1 + b_1 - t)$. Alors γ_1 et γ_1^- sont des chemins équivalents de $\mathbb{R}^p$ de classe C^1 par morceaux. Ils ont des orientations opposées.

4.6 Proposition. *Soit $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^p$ un chemin de $\mathbb{R}^p$ de classe C^1 par morceaux ($i = 1, \ldots, n$). On suppose que l'on a $\gamma_i(a_i) = \gamma_{i-1}(b_{i-1})$, ($i = 2, \ldots, n$). Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ une suite dans $[a, b]$ telle que $a = \alpha_0 < \cdots < \alpha_n = b$. Alors il existe $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1 par morceaux tel que $\gamma_{|[\alpha_{i-1}, \alpha_i]}$ soit équivalent à γ_i avec même orientation ($i = 1, \ldots, n$).*

Un tel chemin $([a, b], \gamma)$ est appelé une juxtaposition de $([a_1, b_1], \gamma_1)$, ..., $([a_n, b_n], \gamma_n)$. Notons que l'on obtiendra toutes les juxtapositions de $([a_1, b_1], \gamma_1)$, ..., $([a_n, b_n], \gamma_n)$ en prenant tous les chemins de classe C^1 par morceaux qui sont équivalents, avec même orientation, à l'une de ces juxtapositions arbitrairement choisie.

Démonstration. Exercice. □

4.3 Théorème. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^p$ et soit ω une forme différentielle continue sur U. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *ω est une forme différentielle exacte sur U.*
2. *On a $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout chemin fermé γ de $\mathbb{R}^p$ de classe C^1 par morceaux à support inclus dans U.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2). Voir 4.1.

(2) $\Rightarrow$ (1). Il résulte de (2) que si deux chemins γ_1 et γ_2 de $\mathbb{R}^p$ de classe C^1 par morceaux à support inclus dans U ont d'une part la même origine et d'autre part la même extremité, on a

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

(utiliser 4.6 et 4.3).

D'autre part, si $x, y \in U$, il existe au moins un chemin γ de $\mathbb{R}^p$ de classe C^1 par morceaux à support inclus dans U, dont l'origine est x et dont l'extremité est y.

En effet, comme U est connexe, il existe une suite finie $u_1, \ldots, u_n$ dans U telle que $u_1 = x, u_n = y$ et $[u_i, u_{i+1}] \subset U$ pour ($i = 1, \ldots, n-1$). Soit $\gamma_i : [0, 1] \to \mathbb{R}^p$ définie par $\gamma_i(t) = (1-t)u_i + tu_{i+1}$. Alors γ_i est continûment dérivable et son support est $[u_i, u_{i+1}] \subset U$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. On obtiendra γ en juxtaposant $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ comme indiqué en 4.6.

Soit u un point fixé dans U (arbitrairement). Soit $f : U \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_\gamma \omega$, où γ est un chemin quelconque de classe C^1 par morceaux à support inclus dans U, dont u est l'origine et dont x est l'extrémité.

On a $\omega = \sum_{i=1}^p P_i dx_i$ ($i = 1, \ldots, p$). Montrons que l'on a $\frac{\partial f}{\partial x_i} = P_i$. Comme P_i est continue, il en résultera d'une part que f est de classe C^1, donc différentiable sur U, et d'autre part que $df = \omega$.

Soit $a = (a_1, \ldots, a_p) \in U$. Montrons que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = P_i(a)$. Pour tout $h \neq 0$ (réel), posons $x_h = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+h}, a_{i+1}, \ldots, a_p)$. Pour $|h|$ assez petit (ce que l'on supposera), on a $[a, x_h] \subset U$.

On voit facilement que $f(x_h) - f(a)$ est égal à l'intégrale de ω le long de n'importe quel chemin de classe C^1 par morceaux à support inclus dans U, dont a est l'origine et x_h l'extrémité. On a donc en particulier

$$f(x_h) - f(a) = \int_{\gamma_h} \omega$$

où $\gamma_h : [0,1] \to \mathbb{R}^p$ est définie par $\gamma_h(t) = (1-t)a + tx_h$. Notons que $\gamma_h([0,1]) = [a, x_h] \subset \mathrm{U}$. On a par conséquent

$$f(x_h) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{P}_i(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t_h, a_{i+1}, \ldots, a_p) h dt$$

donc

$$\frac{f(x_h) - f(a)}{h} = \mathrm{P}_i(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + r_h h, a_{i+1}, \ldots, a_p)$$

où $r_h \in [0,1]$. Il en résulte que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_h) - f(a)}{h} = \mathrm{P}_i(a)$$

□

4.6 Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et soit $\mathrm{V} : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ continue (on dit que V est un champ de vecteurs continu sur U). On a $\mathrm{V} = (\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_p)$. Posons $\omega = \sum_{i=1}^p \mathrm{P}_i dx_i$. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ un chemin de $\mathbb{R}^p$ de classe C^1 par morceaux à support inclus dans U.

On appelle intégrale curviligne (ou circulation) de V le long de γ le réel $\int_\gamma \omega$.

4.3 Mesure

4.3.1 Préliminaires

1. On pose $[0,+\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ où $+\infty$ désigne un point fixé qui n'est pas dans $\mathbb{R}_+$. On étend à $[0,+\infty]$ les opérations algébriques sur $\mathbb{R}_+$ de la manière suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} &(+\infty) + (+\infty) = x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \\ &(+\infty) \times (+\infty) = x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = +\infty \quad \text{si } x > 0 \\ &\quad (+\infty) \times 0 = 0 \times (+\infty) = 0 \end{aligned}$$

2. On étend à $[0,+\infty]$ l'ordre usuel sur $\mathbb{R}_+$ en posant $0 \leqslant x \leqslant +\infty$ pour tout $x \in [0,+\infty]$. C'est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}_+$. Toute partie de $[0,+\infty]$ non vide admet une borne supérieure.
3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $[0,+\infty]$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet x (resp. $+\infty$) comme limite si pour tout réel $\varepsilon > 0$ (resp. pour tout réel $\mathrm{A} > 0$) on a $\left|x_n - x\right| < \varepsilon$ (resp. $x_n > \mathrm{A}$) sauf pour un nombre fini de n. On écrit alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$). Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante), on a $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$).

4.7 Définitions. 1. Une tribu de parties de $\mathbb{R}^p$ est un sous ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\mathbb{R}^p)$ tel que :

(a) $\emptyset \in \mathscr{A}$

(b) Si $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$, $\complement_{\mathbb{R}^p}\mathrm{A} \in \mathscr{A}$.

(c) Si $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathscr{A}$.

2. Considérons toutes les tribus sur $\mathbb{R}^p$ qui contiennent l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^p$ (il en existe au moins une : $\mathscr{P}(\mathbb{R}^p)$). Leur intersection est notée $\mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$; c'est la plus petite tribu sur $\mathbb{R}^p$ contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^p$. On dit que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^p$. Les éléments de $\mathscr{B}(\mathrm{R}^p)$ sont appelés les boréliens de $\mathscr{B}(\mathrm{R}^p)$. Notons que les parties de $\mathbb{R}^p$ que l'on rencontre en pratique sont toutes des boréliens.

4.4 Théorème. *Il existe une et une seule application $m_p : \mathscr{B}(\mathbb{R}^p) \to [0, +\infty]$ telle que :*

1. $m_p(\emptyset) = 0$
2. *Pour toute suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$ deux à deux disjoints, on a*
$$m_p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} m_p(\mathrm{A}_n)$$
3. *Pour toute partie* B *de $\mathbb{R}^p$ de la forme $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p]$ avec $a_i \leqslant b_i$ ($i = 1, \ldots, p$), on a*
$$m_p(\mathrm{B}) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_p - a_p)$$

4.8 Définition. On dit que m_p est la mesure de Borel sur $\mathbb{R}^p$ (ou sur $\mathscr{B}(\mathrm{R}^p)$). Pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$, $m_p(\mathrm{A})$ est appelé la mesure de A.

Si $p = 1$ (resp. $p = 2$, resp. $p = 3$), $m_p(\mathrm{A})$ est aussi appelé la longueur (resp. l'aire, resp. le volume) de A.

4.4 Applications boréliennes

4.9 Définition. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ (resp. $f : \mathbb{R}^p \to [0, +\infty]$). On dit que f est borélienne si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\alpha \in \mathbb{R}_+$), on a
$$\{x \in \mathbb{R}^p / \alpha < f(x)\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$$
Signalons que les applications de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $[0, +\infty]$) rencontrées en pratique sont boréliennes.

4.7 Proposition. *Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est borélienne.*

Démonstration. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ est l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une application continue, donc un ouvert de $\mathbb{R}^p$, donc un borélien de $\mathbb{R}^p$. □

4.8 Proposition. *Soient f et g des applications boréliennes de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $[0, +\infty]$) et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\alpha \in [0, +\infty]$). Alors $|f|$, αf, $f + g$ et fg sont boréliennes.*

Démonstration. Exercice. □

4.9 Proposition. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications boréliennes de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $[0, +\infty]$) et soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ (resp. $\to [0, +\infty]$). On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, c'est à dire que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$. Alors f est borélienne.*

4.10 Proposition. *Soit $f : \mathbb{R}^p \to [0, +\infty]$ borélienne. Alors il existe une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications boréliennes de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que l'on a :*

1. $s_n(x) \leqslant s_{n+1}(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^p$ $(n \in \mathbb{N})$.
2. $\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^p$.
3. $s_n(\mathbb{R}^p)$ *est une partie finie de* $\mathbb{R}_+$.

Remarques. Pour toute partie A de $\mathbb{R}^p$, soit 1_{A} l'indicatrice de A, c'est à dire l'application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $[0, +\infty]$) définie par $1_{\mathrm{A}}(x) = 1$ si $x \in \mathrm{A}$ et $1_{\mathrm{A}}(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^p \setminus \mathrm{A}$. On voit facilement que $s : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$ est borélienne et telle que $s(\mathbb{R}^p)$ soit finie si et seuleent s'il existe $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{\mathrm{A}_i}$$

Noter que si $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p$, alors A est un borélien de $\mathbb{R}^p$ si et seulement si 1_{A} est borélienne.

4.5 Intégrale d'une fonction borélienne positive ou nulle

Notation. On note $\mathscr{M}_+(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p))$ l'ensemble des applications boréliennes de $\mathbb{R}^p$ dans $[0, +\infty]$.

4.5 Théorème. *Il existe une et une seule application $\Phi : \mathscr{M}_+(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)) \to [0, +\infty]$ telle que :*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$, $\forall f \in \mathscr{M}_+(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p))$, $\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi(f)$
2. $\forall f, g \in \mathscr{M}_+(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p))$, $\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g)$
3. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{M}_+(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p))$ telle que $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite croissante $(\Phi(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet $\Phi(\lim_n f_n)$ comme limite.*
4. $\forall \mathrm{A} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$, $\Phi(1_{\mathrm{A}}) = m_p(\mathrm{A})$.

4.10 Définition. Soit A un borélien de $\mathbb{R}^p$, et soit $f : \mathrm{A} \to [0, +\infty]$. Soit $\overline{f} : \mathbb{R}^p \to [0, +\infty]$ définie par

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in \mathrm{A} \\ 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^p \setminus \mathrm{A} \end{cases}$$

On dit que f est borélienne sur A si $\overline{f}$ est borélienne. Supposons f borélienne sur A. Alors $\Phi(\overline{f})$ est noté $\int_{\mathrm{A}} f \, dm_p$ ou bien

$$\underbrace{\int \cdots \int_{\mathrm{A}}}_{p \text{ fois}} f(x_1, \ldots, x_p) dx_1 \ldots dx_p$$

et est appelé l'intégrale p-uple de f sur A. Si $p = 1$ (resp. $p = 2$, resp. $p = 3$) on parle de l'intégraple simple (resp. double, resp. triple) de f sur A.

4.11 Proposition. *Soit* A *un borélien de* $\mathbb{R}^p$ *et soient* f, g *deux applications boréliennes de* A *dans* $[0, +\infty]$. *Alors :*

1. *On a* $\int_A (f+g)dm_p = \int_A f\, dm_p + \int_A g\, dm_p$
2. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, *on a* $\int_A \alpha f\, dm_p = \alpha \int_A f\, dm_p$
3. *Si* $f \leqslant g$, *on a* $\int_A f\, dm_p \leqslant \int_A g\, dm_p$
4. *Si* $B, C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)$ *et si* $B \cap C = \emptyset$, *on a* $\int_{B\cup C} f\, dm_p = \int_B f\, dm_p + \int_C f\, dm_p$
5. *Si* f *est nulle sur* A, *on a* $\int_A f\, dm_p = 0$. *Plus généralement, si*

$$m_p\left(\{x \in A / f(x) \neq 0\}\right) = 0$$

on a $\int_A f\, dm_p = 0$. *En particulier, si* $m_p(A) = 0$, *alors* $\int_A f\, dm_p = 0$.

4.6 Théorème (Fudini). *Soit* A *un borélien de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : A \to [0, +\infty]$ *borélienne. Soit* $\overline{f} : \mathbb{R}^p \to [0, +\infty]$ *définie comme ci-dessus. Alors :*

1. *Si* $p = 2$, *on a*

$$\begin{aligned}\iint_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} \overline{f}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{f}(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2\end{aligned}$$

Pour des raisons de commodité, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{\mathbb{R}} \int \overline{f}(x_1, x_2) dx_1$$

2. *Si* $p = 3$, *on a*

$$\begin{aligned}\iiint_A f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \overline{f}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{f}(x_1, x_2, x_3) dx_1 \right) dx_2 dx_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{f}(x_1, x_2, x_3) dx_1 \right) dx_2 \right) dx_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx_3 \int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(x_1, x_2, x_3) dx_1\end{aligned}$$

3. *De manière générale, on a*

$$\begin{aligned}\int \cdots \int_A f(x_1, \ldots, x_p) dx_1 \ldots dx_p &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^p} \overline{f}(x_1, \ldots, x_p) dx_1 \ldots dx_p \\ &= \int \cdots \int_{\mathrm{R}^{p-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{f}(x_1, \ldots, x_p) dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_p \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx_p \int_{\mathbb{R}} dx_{p-1} \ldots \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(x_1, \ldots, x_p) dx_1\end{aligned}$$

Remarques. 1. Pour tout $(x_2,\dots,x_p) \in \mathbb{R}^{p-1}$, l'application $x_1 \to \overline{f}(x_1,\dots,x_p)$: $\mathbb{R} \to [0,+\infty]$ est borélienne. De même, l'application

$$(x_2,\dots,x_p) \to \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(x_1,\dots,x_p)dx_1$$

est borélienne.

2. Si $p=1$, si $\mathrm{A}=[a,b]$ $(a \leqslant b)$ et si f est continue, $\int_{\mathrm{A}} f(x_1)dx_1$ définie en 4.6 n'est autre que $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$, où F est une primitive de f sur $[a,b]$.
3. Compte tenu de 4.6, le calcul des intégrales multiples se ramène de proche en proche à des calculs d'intégrales simples (qui se ramènent eux-mêmes, en général, à des calculs de primitives).
4. Dans 4.6, on peut « intervertir » les intégrations. Autrement dit, pour toute bijection $\sigma : \{1,\dots,p\} \to \{1,\dots,p\}$, on a :

$$\begin{aligned}&\int \cdots \int_{\mathrm{A}} f(x_1,\dots,x_p)dx_1\dots dx_p\\ &= \int_{\mathbb{R}} dx_{\sigma(p)} \int_{\mathbb{R}} dx_{\sigma(p-1)} \cdots \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(x_1,\dots,x_p)dx_{\sigma(1)}\end{aligned}$$

5. En utilisant le 3 et le 4 de 4.6, on obtient des formules diverses. Par exemple, on a

$$\begin{aligned}&\int \cdots \int_{\mathrm{A}} f(x_1,\dots,x_p)dx_1\dots dx_p\\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{p-1}} \overline{f}(x_1,\dots,x_p)dx_2\dots dx_p \right) dx_1\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}&\int \cdots \int_{\mathrm{A}} f(x_1,\dots,x_p)dx_1\dots dx_p\\ &= \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^{p-q}} \overline{f}(x_1,\dots,x_p)dx_{q+1}\dots dx_p \right) dx_1\dots dx_q\end{aligned}$$

Exemple. Soit A le trianle de $\mathbb{R}^2$ défini par les inégalités $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 1$ et $x_1+x_2 \leqslant 4$. Calculons

$$\iint_{\mathrm{A}} \frac{1}{(x_1+x_2)^4} dx_1 dx_2$$

On doit intégrer sur $\mathbb{R}^2$ l'application borélienne égale à $\frac{1}{(x_1+x_2)^4}$ si $(x_1,x_2) \in \mathrm{A}$ et à 0 si $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{A}$. Fixons x_1 et intégrons par rapport à x_2. Si $x_1 \notin [1,3]$, la fonction à intégrer est nulle, donc l'intégrale est nulle. Si $x \in [1,3]$, la fonction à intégrer est égale à $\frac{1}{(x_1+x_2)^4}$ pour $x_2 \in [1,4-x_1]$, et à 0 si $x_2 \notin [1,4-x_1]$. On a donc

$$\mathrm{I} = \int_1^3 dx_1 \left(\int_1^{4-x_1} \frac{1}{(x_1+x_2)^4} dx_2 \right)$$

Pour tout $x_1 \in [1,3]$, on a

$$\int_1^{4-x_1} \frac{1}{(x_1+x_2)^4} dx_2 = \left[\frac{(x_1+x_2)^{-3}}{-3}\right]_1^{4-x_1}$$
$$= \frac{1}{3(x_1+1)^3} - \frac{1}{192}$$

On a donc

$$\mathrm{I} = \int_1^3 \left(\frac{1}{3(x_1+1)^3} - \frac{1}{192}\right) dx_1$$
$$= \left[\frac{1}{-6(x_1+1)^2} - \frac{1}{192}x_1\right]_1^3$$
$$= \frac{1}{48}$$

Exercice. Soit A le huitième de boule de $\mathbb{R}^3$ défini par $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1$. Calculer

$$\mathrm{I} = \iiint_{\mathrm{A}} x_1 x_2 x_3 dx_1 dx_2 dx_3$$

Réponse : $\mathrm{I} = \frac{1}{12}$.

4.12 Proposition. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soient φ_1 et φ_2 des applications boréliennes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$. Soit A le borélien de $\mathbb{R}^2$ défini par*

$$\mathrm{A} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \in [a,b] \text{ et } \varphi_1(x_2) \leqslant x_2 \leqslant \varphi_2(x_1)\}$$

Alors pour toute application borélienne $f : \mathrm{A} \to [0,+\infty]$, on a

$$\iint_{\mathrm{A}} f(x_1+x_2) dx_1 dx_2 = \int_a^b dx_1 \int_{\varphi_1(x_1)}^{\varphi_2(x_1)} f(x_1,x_2) dx_2$$

Démonstration. Immédiat d'après 4.6. □

4.6 Calcul de $m_p(\mathrm{A})$

Soit A un borélien de $\mathbb{R}^p$. On a

$$m_p(\mathrm{A}) = \int_{\mathbb{R}^p} 1_{\mathrm{A}} dm_p$$

d'après 4.5. Compte tenu de 4.6 et 4.5, on peut calculer $m_p(\mathrm{A})$ par des intégrations successives.

Exercice. Soient a_1, a_2, a_3 des réels > 0. Soit

$$\mathrm{A} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^3}{a_3^2} \leqslant 1$$

Calculer le volume $m_3(\mathrm{A})$ du borélien A de $\mathbb{R}^3$.

4.7 Changement de variables

4.7 Théorème. *Soient* U *et* V *des ouverts de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *une bijection de classe* C^1 *telle que* φ *et* φ^{-1} *soient de classe* C^1 *(*φ *est donc un* C^1*-difféomorphisme du* U *sur* V*). Soit* $\Delta : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *l'application qui à tout* $x \in \mathrm{U}$ *associe le jacobien de* φ *en* x *(*Δ *est continue). Alors pour toute application borélienne* $f : \mathrm{V} \to [0, +\infty]$*, l'application* $f \circ \varphi : \mathrm{U} \to [0, +\infty]$ *est borélienne et l'on a*

$$\int_{\mathrm{V}} f\,dm_p = \int_{\mathrm{U}} (f \circ \varphi) \times |\Delta|\,dm_p$$

Exemple (Passage en coordonnées polaires)**.** Soit $\mathrm{U} = \{(\theta, r) \in \mathbb{R}^2 / -\pi < \theta < \pi, r > 0\}$. Soit $\mathrm{D} = \{(x_1, 0)/x_1 \in \mathbb{R}, x_1 \leqslant 0\}$ et soit $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{D}$ (U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$). Soit $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ le C^1-difféomorphisme défini par $\varphi(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Pour tout $x \in \mathrm{U}$, le jacobien de φ en x est $-r$. D'après 4.7, pour toute application borélienne $f : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty]$,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 &= \iint_{\mathrm{V}} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \quad \text{car } m_2(\mathrm{D}) = 0 \\ &= \iint_{\mathrm{U}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,d\theta\,dr\end{aligned}$$

Exercice. En utilisant 4.7, montrer que l'on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x_1^2 - x_2^2}dx_1dx_2 = \pi$$

4.8 Intégrale d'une fonction borélienne quelconque

Notation. On note $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p))$ l'ensemble des applications boréliennes f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_{\mathbb{R}^p} |f|dm_p < +\infty$ ($|f| : \mathbb{R}^p \to [0, +\infty[$ est borélienne).

4.8 Théorème. *Soient* $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p))$ *et soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Alors*

$$\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p))$$

Comme la fonction réelle nulle sur $\mathbb{R}^p$ *appartient bien sûr à* $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p))$*, on voit que* $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p))$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*.*

4.9 Théorème. *Il existe une et une seule application* $\mathrm{I} : \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p)) \to \mathbb{R}$ *telle que :*

1. $\mathrm{I}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{I}(f) + \beta \mathrm{I}(g)$*,* $\forall f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p))$*,* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Autrement dit,* I *est linéaire.*
2. *Si* $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p))$ *et si* $f \geqslant 0$*, alors* $\mathrm{I}(f) = \int_{\mathbb{R}^p} f\,dm_p$ *(*$= \Phi(f)$ *en 4.5).*

4.11 Définition. Soit A un borélien de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ une application. Soit $\overline{f} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \mathrm{A} \\ \quad 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^p \setminus \mathrm{A} \end{cases}$$

On dit que f est borélienne si $\overline{f}$ l'est. On dit que f est intégrable sur A si $\overline{\mathrm{A}} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p))$. Supposons f intégrale sur A ; alors $\mathrm{I}(\overline{f})$ est appelé l'intégrale p-uple de f sur A. $\mathrm{I}(\overline{f})$ est notée

$$\int_{\mathrm{A}} f \, dm_p$$

ou

$$\int \cdots \int_{\mathrm{A}} f(x_1, \ldots, x_p) dx_1 \ldots dx_p$$

Si $p = 1$ (resp. $p = 2$, resp. $p = 3$), on parle de l'intégrale simple (resp. double, resp. triple) de f sur A.

4.8.1 Propriétés importantes

Les énoncés donnés en 4.11, 4.6, 4.5, 4.12 et en 4.7 restent vrais si f et g sont pris dans $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p))$ au lieu de $\mathscr{M}_+(\mathbb{R}^p, \mathscr{B}(\mathbb{R}^p))$.

En particulier, on a le théorème suivant qui permet de calculer des intégrales multiples :

4.10 Théorème. *Soit* A *un borélien de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ *intégrable. Soit* $\overline{f}$ *l'application associée à* f *comme en 4.11. Alors on a*

$$\begin{aligned}
\int \cdots \int_{\mathrm{A}} f(x_1, \ldots, x_p) dx_1 \ldots dx_p &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^p} \overline{f}(x_1, \ldots, x_p) dx_1 \ldots dx_p \\
&= \int \cdots \int_{\mathbb{R}^{p-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{f}(x_1, \ldots, x_p) dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_p \\
&= \int_{\mathbb{R}} dx_p \int_{\mathbb{R}} dx_{p-1} \ldots \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(x_1, \ldots, x_p) dx_1
\end{aligned}$$

Remarques.
1. Pour tout $(x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^{p-1}$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x_1 associe $\overline{f}(x_1, \ldots, x_p)$ est intégrable. En fait, l'ensemble des $x_1 \in \mathbb{R}$ pour lesquels c'est réalisé est un borélien de $\mathbb{R}$ dont le complémentaire est de mesure nulle.
2. On peut faire à propos de 4.10 des remarques analogues à celles faites à propros de 4.6 en 4.5 2), 3) et 4).

4.13 Proposition. *Soit* A *un borélien de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ *une application intégrable. Alors* $|f| : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ *est intégrale et l'on a*

$$\left| \int_{\mathrm{A}} f \, dm_p \right| \leqslant \int_{\mathrm{A}} |f| dm_p$$

Remarque. Soit A un borélien de $\mathbb{R}^p$ et soit $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ borélienne. Supposons qu'il existe $g : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f| \leqslant |g|$. Alors f est intégrable. En effet, on a

$$\int_{\mathrm{A}} f \, dm_p \leqslant \int_{\mathrm{A}} g \, dm_p < +\infty$$

On a en particulier la propriété importante suivante :

4.14 Proposition. *Soit* A *un borélien borné de* $\mathbb{R}^p$ *et soit* $f : A \to \mathbb{R}$ *une application borélienne bornée. Alors* f *est intégrable.*

Démonstration. Soit $M > 0$ (réel) tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in A$ et soit $g : A \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = M$ pour tout $x \in A$. On a $|f| \leqslant |g|$ sur A. On a $\overline{g} = M1_A$ et

$$\int_{\mathbb{R}^p} \overline{g} dm_p = Mm_p(A) < +\infty$$

car tout borélien borné de $\mathbb{R}^p$ est de mesure finie. □

4.9 Formule de Green-Riemann

4.12 Définitions. Soit A un compact de $\mathbb{R}^2$. Supposons qu'il existe une suite finie $([a_i, b_i], \gamma_i)$ $(i = 1, \dots, n)$. Le chemin de $\mathbb{R}^2$ de classe C^1 telle que : si $i \neq j$, alors

- $\gamma_i(]a_i, b_i[) \cap \gamma_j(]a_j, b_j[) = \emptyset$;
- $\bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i([a_i, b_i]) = \mathrm{Fr}(A)$. La frontière Fr(B) d'une partie B de $\mathbb{R}^2$ est par définition $\overline{B} \cap \overline{\complement_{\mathbb{R}^2} B}$.
- γ_i est injective ou $\gamma_{i_{|[a_i, b_i[}}$ est injective et $\gamma_i(a_i) = \gamma_i(b_i)$;
- Si $t_0 \in]a_i, b_i[$ alors $\gamma_i'(t_0) \neq 0$ et il existe un voisinage ouvert V de $\gamma_i(t_0)$ tel que si $(x, y \in V)$ et si (x, y) « est à gauche » (resp. « à droite ») de $\gamma_i([a_i, b_i]) \cap V$, alors $(x, y) \in A \setminus \mathrm{Fr}(A)$ (resp. $(x, y) \notin A$).
  Autrement dit, quand t décrit $]a_i, b_i[$ en croissant, les points du plan à gauche (resp. à droite) de l'observateur, $\gamma(t)$ qui sont voisins de $\gamma(t)$, appartiennent à $A \setminus \mathrm{Fr}(A)$ (resp. à $\complement A$).

Dans ces conditions on dit que A est un compact simple de $\mathbb{R}^2$ et on dit que la suite finie $([a_i, b_i], \gamma_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est un bord orienté de A. Un tel bord est noté ∂A.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant A et soit ω une forme différentielle continue sur U. L'intégrale curviligne de ω le long de ∂A est par définition le réel noté

$$\int_{\partial A} \omega$$

définie par

$$\int_{\partial A} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \omega$$

4.11 Théorème (Green-Riemann)**.** *Soit* A *un compact simple de* $\mathbb{R}^2$ *et soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *contenant* A. *Soit* $\omega = Pdx + Qdy$ *une forme différentielle de classe* C^1 *sur* U. *Alors on a*

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial A} Pdx + Qdy$$

Exemple.

Index