Notes du cours d'analyse 2 de R. Labbas

FMdKdD
fmdkdd [à] free.fr

Université du Havre
Année 2008–2009

Table des matières

Chapitre I

Séries numériques

I.1 Rappels sur les suites

Définition 1. Soit E un ensemble, on appelle suite d'éléments de E une application $u : \mathbb{N} \to E$ définie par $n \mapsto u(n) = u_n$. On dit aussi la suite $(u_0, \ldots, u_n, \ldots)$ ou $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$. On peut aussi considérer des suites à partir d'un certain rang p.

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_p &= \left\{n \in \mathbb{N} / n \geqslant p\right\} \\ u : &\mathbb{N}_p \to E \\ &n \mapsto u(n) \\ &u, (u_n)_{n\geqslant p}, \left(u_p, u_{p+1}, \ldots\right) \end{aligned}$$

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante : $\forall k \in \mathbb{N}, f(k) < f(k+1)$. Soit $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ une suite de E. On pose :

$$\begin{cases} v_k = u_{f(k)} \\ k \in \mathbb{N} \\ \left(v_k\right)_{k\geqslant 0}, \left(u_{f(0)}, \ldots, u_{f(n)}\right) \end{cases}$$

$\left(v_k\right)_{k\geqslant 0}$ est dite extraite de $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$, ou sous-suite.

I.1.1 Limite d'une suite

$$\begin{aligned} u : &\mathbb{N} \to \mathbb{C} \\ &n \mapsto u(n) = a_n + i b_n \end{aligned}$$

Étudier $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ équivaut à l'étude de $\left(a_n\right)_{n\geqslant 0}$ et de $\left(b_n\right)_{n\geqslant 0}$.

$$\begin{cases} u: & \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ & n \to u(n) \end{cases}$$

1^{er} cas : $\lim_{n\to\infty} = \ell \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \Rightarrow \left|u_n - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$
$$\left|u_n - \ell\right| \leqslant \varepsilon \iff \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

On dira que $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est convergente et converge vers ℓ.

2^{e} cas : $\lim_{n\to\infty} = +\infty$

$$\forall \mathrm{A} > 0, \exists \mathrm{N}(\mathrm{A}) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}) \Rightarrow u_n \geqslant \mathrm{A}$$

$\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est divergente et diverge vers $+\infty$.

3^{e} cas : $\lim_{n\to\infty} = -\infty$

$$\forall \mathrm{B} > 0, \exists \mathrm{N}(\mathrm{B}) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant \mathrm{N}(\mathrm{B}) \Rightarrow u_n \leqslant \mathrm{A}$$

4^{e} cas : autres situations $u_n = (-1)^n$

Proposition 1. *Soit $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ une suite convergente vers ℓ. Alors :*

1. *toute sous-suite converge vers ℓ,*
2. *la suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée : $\exists \mathrm{M} \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|u_n\right| \leqslant \mathrm{M}$.*

I.1.2 Valeur d'adhérence d'une suite

On appelle valeur d'adhérence de $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ tout réel α limite d'une sous-suite.

Exemple.

$$u_n = (-1)^n, u_0 = 1$$

$\alpha = -1$ et $\alpha = 1$ sont des valeurs d'adhérence.

$$v_k = u_{2k} = 1 \text{ et } w_k = u_{2k+1} = -1$$

Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ alors ℓ est la seule valeur d'adhérence de $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$.

Si $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée, on peut alors extraire une sous-suite convergente. (Bolzano-Weirstrass). Toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence. On note $\overline{\lim}\, u_n$ ou $\underline{\lim}\, u_n$

I.1.3 Suite de Cauchy

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$. On dira que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant \mathbb{N}(\varepsilon) \Rightarrow \left|u_p - u_q\right| \leqslant \varepsilon$$

La limite éventuelle n'est pas dans la définition.

Proposition 2. *(dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ (réelle ou complexe) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

I.1.4 Opérations sur les suites

($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) $(u_n)_{n\geqslant 0}$ $(v_n)_{n\geqslant 0}$

- $(u_n + v_n)_{n\geqslant 0}$ suite somme
- $(u_n \cdot v_n)_{n\geqslant 0}$ suite produit
- $(\lambda u_n)_{n\geqslant 0}$ $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant 0} (v_n \neq 0)$

On suppose : $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$, $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell'$. Alors :

- $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \ell + \ell'$
- $\lim_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = \ell\ell'$
- $\lim_{n\to\infty}(\lambda u_n) = \lambda\ell \quad \lambda \in \mathbb{R} ou \mathbb{C}$
- $\lim_{n\to\infty}(\frac{u_n}{v_n}) = \frac{\ell}{\ell'}$ si $\ell' \neq 0$ et $v_n \neq 0$ pour n grand
- $\left|u_n\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |\ell|$

I.1.5 Propriété dans $\mathbb{R}$

Si $\forall n \geqslant 0, u_n \leqslant v_n$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to\infty} v_n$ de même si $u_n \leqslant v_n$ est vraie pour $n \geqslant p$.

Proposition 3. *(Gendarmes) Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ sont trois suites réelles avec :*

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \text{ pour } n \text{ assez grand}$$

Si de plus $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \ell$ *alors* $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell$.

I.1.6 Suites monotones et suites adjacentes

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante si :

$$\forall n \geqslant 0, u_{n+1} \geqslant u_n$$

(ou à partir d'un rang p). On note : $(u_n)_{n\geqslant 0} \nearrow$, et strictement croissante : $(u_n)_{n\geqslant 0} \nearrow^{st}$. Même notations avec $\searrow$ pour les suites décroissante.

Proposition 4. *Soient* $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$, $\left(v_n\right)_{n\geqslant 0}$ *deux suites réelles telles que :*

- $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ *est croissante,*
- $\left(v_n\right)_{n\geqslant 0}$ *est décroissante,*
- $\forall n \geqslant 0, u_n \leqslant v_n$.

Alors ces deux suites sont convergentes et $\lim_{n\to\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to\infty} v_n$. *Si de plus* $(u_n - v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *alors les deux suites sont dites adjacentes.*

Rappel : toute suite croissante majorée est convergente, toute suite décroissante minorée est convergente.

$\forall n \geqslant 0, u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant v_0 \Rightarrow \left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est convergente. Idem pour v_n.

I.2 Généralités sur les séries numériques

Définition 2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite numérique (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On pose pour $n \geqslant 0$:

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

On a donc une suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$. Alors $(s_n)_{n\geqslant 0}$ s'appelle une série numérique de terme général u_n. s_n est la somme partielle d'ordre n.

Notation. On dira la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ au lieu de la suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$. On dira que la série est convergente et converge vers s si et seulement si la suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente vers s. On note :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

s s'appelle la somme de la série.

On peut aussi considérer des séries à partir d'un certain rang p :

$$s_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{k\geqslant p}^{n} u_k$$

Exemple.

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$$

Proposition 5. *Soit* $p > 0$ *un rang donné. Soit* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite fixée. Alors la série* $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ *est convergente si et seulement si* $\sum_{k\geqslant p} u_k$ *est convergente.*

Démonstration.

$$\forall n \geqslant 0, s'_n = s_n - \left(u_0 + u_1 + \cdots + u_{p-1}\right) = s_n - s_{p-1}$$

Si $\lim_{n\to\infty} s'_n = \ell$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(s'_n + s_{p-1}\right) = \lim_{n\to\infty} s'_n + s_{p-1} = \ell + s_{p-1}$$

Réciproquement, si $\lim_{n\to\infty} s_n = \ell$:

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{p-1} = \ell - s_{p-1}$$

□

Corollaire 1. *La nature d'une série numérique ne change pas si on modifie un nombre fini de ses termes.*

Définition 3. Soit $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ une série convergente qui converge vers s. Posons $s_p = u_0 + u_1 + \cdots + u_p, p \geqslant 0$. Alors la différence :

$$\begin{aligned} r_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right) - s_p &= \left(\lim_{n\to\infty} s_n\right) - s_p \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(s_n - s_p\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{p} u_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=p+1}^{n} u_k\right) \\ &= \sum_{k=p+1}^{\infty} u_k \end{aligned}$$

s'appelle le reste à l'ordre p de la série. On a :

$$\lim_{p\to\infty} r_p = s - \lim_{p\to\infty} s_p = s - s = 0$$

Proposition 6. *(condition nécessaire mais non suffisante) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite numérique. Si la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.*

Remarque. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \Rightarrow \sum_{k\geqslant 0} u_k$ diverge.

Démonstration.

$$\forall n \geqslant 0, u_n = s_n - s_{n-1} = \big((u_0 + \cdots + u_n) - (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1})\big)$$

Par hypothèse :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(s_{n-1}) = s$$

car $(s_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est une suite extraite de $(s_n)_{n\geqslant 0}$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = s - s = 0$$

□

Exemples.

1.

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2n-5} = 0 + (-\frac{1}{3}) + \ldots$$

$$u_n = \frac{n}{2n-5} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

donc la série diverge.

2.

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} = 0$$

Montrons que $(s_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= (1 + 1/2 + \cdots + 1/2n) - (1 + 1/2 + \cdots + 1/n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La différence $(s_{2n} - s_n)$ ne peut pas être rendue aussi petite donc $(s_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas de Cauchy. La suite est croissante, et donc :

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est la série harmonique.

3.

$$\sum_{n \geqslant 0} z^n \quad z \in \mathbb{C} \quad z = \text{raison}$$
$$\sum_{n \geqslant 0} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$$

1^er^cas : $|z| \geqslant 1$ alors $z^n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Car si $z^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow |z^n| = |z|^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ or $|z| \geqslant 1 \not\Rightarrow |z|^n \to 0$. Si $|z| \geqslant 1, \sum_{n \geqslant 0} z^n$ diverge.
Cas où $|z| < 1$:

$$\left(1 + z + z^2 + \cdots + z^n\right)(1 - z) = 1 - z^{n+1}$$
$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$$
$$\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0 \text{ car } \lim_{n\to\infty} \left|z^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} |z|^{n+1} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} = s_n = \frac{1}{1 - z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \text{ somme de la série géometrique de raison } z$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k = z \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{z}{1 - z}$$

Remarque.

$$0,999\cdots = ?$$
$$\begin{aligned} 0,999\cdots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \ldots &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \ldots \\ &= \frac{9}{10}\left[1 + \frac{1}{10} + \ldots\right] \\ 0,999\ldots &= \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \\ &= \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1 \end{aligned}$$

I.2.1 Séries de Cauchy

Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ une série numérique quelconque.

Définition 4. La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est dite de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant (q > p) \Rightarrow \left|u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_q\right| \leqslant \varepsilon$$

Proposition 7. *Une série est convergente (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration.

$$\sum_{k\geqslant 0} u_k \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

$\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est convergente si et seulement si $(s_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente si et seulement si $(s_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p, q \in \mathbb{N}(\varepsilon) \text{ avec } q > p \Rightarrow \left|s_q - s_p\right| \leqslant \varepsilon$$
$$\left|s_q - s_p\right| = \left|u_0 + u_1 + \cdots + u_q - u_0 - u_1 - \cdots - u_p\right| = \left|u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots u_q\right|$$

□

Définition 5. Une série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{k\geqslant 0} \left|u_k\right|$ est convergente.

Proposition 8. *Soit $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ absolument convergente. Alors :*

1. *$\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est convergente,*
2. *$\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left|u_k\right|$,*
3. *$\left|\sum_{k=p+1}^{\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} \left|u_k\right|$.*

Démonstration. 1. $\sum_{k\geqslant 0} \left|u_k\right|$ est convergente donc elle est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p, q \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)(q > p) \text{ alors :}$$
$$\left|u_{p+1}\right| + \left|u_{p+2}\right| + \cdots + \left|u_q\right| \leqslant \varepsilon$$
$$\text{Or} \quad \left|u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_q\right| \leqslant \left|u_{p+1}\right| + \cdots + \left|u_q\right| \leqslant \varepsilon$$

Donc $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est de Cauchy.

2. $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ existe et est finie.

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$\begin{aligned}
\left|\lim_{n\to\infty} s_n\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right| &= \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \quad \text{car } x \mapsto |x| \text{ est continue} \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left|u_k\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left|u_k\right|
\end{aligned}$$

□

Définition 6. Une série qui converge et qui ne converge pas absolument est dite semi convergente.

I.2.2 Opérations sur les séries

$\Sigma(\mathbb{K})$ est l'ensemble de toutes les séries à valeurs dans $\mathbb{K}$.

– Somme de deux séries :

$$\sum_{k\geqslant 0} u_k, \sum_{k\geqslant 0} v_k \quad \sum_{k\geqslant 0} u_k + \sum_{k\geqslant 0} v_k = \sum_{k\geqslant 0} (u_k + v_k)$$

– Multiplication d'une série par un scalaire :

$$\lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot \sum_{k\geqslant 0} u_k = \sum_{k\geqslant 0} \lambda u_k$$

$(\Sigma(\mathbb{K}), +, \cdot\lambda)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Définition 7. On appelle produit des deux séries $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ et $\sum_{k\geqslant 0} v_k$ la série $\sum_{k\geqslant 0} w_k$ où :

$$\begin{aligned}
\forall k \geqslant 0 \quad w_k &= u_0 v_k + u_1 v_{k-1} + u_2 v_{k-2} + \cdots + u_k v_o \\
&= \sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} u_{k-i} v_i \\
&= \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} u_i v_j = \sum_{i+j=k} u_i v_j
\end{aligned}$$

Proposition 9. *Soient $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ et $\sum_{k\geqslant 0} v_k$ deux séries convergentes. Alors :*

1. $\sum_{k\geqslant 0} (u_k \pm v_k)$ *est convergente et* $\sum_{k=0}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} v_k$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \sum_{k\geqslant 0} u_k$ *converge et* $\lambda \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda u_k$

Démonstration. Triviale. □

Proposition 10. *Soient $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ et $\sum_{k\geqslant 0} v_k$ absolument convergentes. Alors la série produit $\sum_{k\geqslant 0} w_k$ (où $w_k = \sum_{i+j=k} u_i v_j$) est absolument convergente (donc convergente) et :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\right)$$

Démonstration.

$$\sum_{k\geqslant 0} u_k \quad \text{absolument convergente} \Rightarrow \sum_{k\geqslant 0} u_k \text{converge}$$
$$\sum_{k\geqslant 0} v_k \quad \text{absolument convergente} \Rightarrow \sum_{k\geqslant 0} v_k \text{converge}$$

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad \mathrm{U} = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$$
$$v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \quad \mathrm{V} = \sum_{k=0}^{\infty} |v_k|$$

La série produit :

$$\sum_{k\geqslant 0} w_k \text{ avec } w_k = \sum_{i+j=k} u_i v_j$$

1. $n \geqslant 0 \quad \mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} |w_k|$ (somme partielle d'ordre n de $\sum_{k\geqslant 0} w_k$).
$$\forall n \geqslant 0 \quad \mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{P}_n = |w_{n+1}| \geqslant 0 \text{ ainsi } (\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 0} \text{ est croissante}$$
2. $n \geqslant 0 \quad \mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} |w_k| = \sum_{k=0}^{n} \left|\sum_{i+j=k} u_i v_j\right|$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} |u_i| |v_j| = \sum_{i+j\leqslant n} |u_i| |v_j| \\ &\leqslant \left(\sum_{i=0}^{n} |u_i|\right) \left(\sum_{j=0}^{n} |v_j|\right) \\ &\leqslant \left(\sum_{i=0}^{\infty} |u_i|\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |v_j|\right) = \mathrm{U} \cdot \mathrm{V}\end{aligned}$$

Ainsi $\forall n \geqslant 0 \quad \mathrm{P}_n \leqslant \mathrm{UV}$, $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 0}$ est $\nearrow$ majorée donc convergente. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 0 \quad & \sum_{k=0}^{n} \left|w_k\right| \leqslant \left(\sum_{i=0}^{\infty}\left|u_i\right|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left|v_j\right|\right)\\ \Rightarrow \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \left|w_k\right| \leqslant \left(\sum_{i=0}^{\infty}\left|u_i\right|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left|v_j\right|\right)\end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum_{k\geqslant 0} w_k$ est convergente.

3. Montrons que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0} v_j\right)$$

Considérons :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_n &= \left\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}/0\leqslant i\leqslant n, 0\leqslant j\leqslant n\right\}\\ \mathrm{B}_n &= \left\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}/0\leqslant i+j\leqslant n\right\}\end{aligned}$$

On a $\mathrm{B}_n \subset \mathrm{A}_n$ car :

$$(i,j)\in\mathrm{B}_n \Rightarrow 0\leqslant i+j\leqslant n \Rightarrow 0\leqslant i\leqslant n \text{ et } 0\leqslant j\leqslant n \Rightarrow (i,j)\in\mathrm{A}_n$$

$$\forall n \leqslant 0 \quad \mathrm{A}_n \subset \mathrm{B}_{2n} \subset \mathrm{A}_{2n}$$
$$(i,j)\in\mathrm{A}_n \Rightarrow 0\leqslant i\leqslant n \text{ et } 0\leqslant j\leqslant n \Rightarrow 0\leqslant i+j\leqslant 2n \Rightarrow (i,j)\in\mathrm{B}_{2n}$$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\mathrm{D}_n = \left|\sum_{k=0}^{2n} w_k - \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)\right|$$

on fera $n \to +\infty$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_n &= \left|\sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} u_i v_j\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i+j\leqslant 2n} u_i v_j - \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} u_i v_j\right| \\
&= \left|\sum_{(i,j)\in \mathrm{B}_{2n}} u_i v_j - \sum_{(i,j)\in \mathrm{A}_n} u_i v_j\right| \\
&= \left|\sum_{(i,j)\in \mathrm{B}_{2n}\setminus \mathrm{A}_n} u_i v_j\right| \\
&\leqslant \sum_{(i,j)\in \mathrm{B}_{2n}\setminus \mathrm{A}_n} \left|u_i\right|\left|v_j\right| \\
&\leqslant \sum_{(i,j)\in \mathrm{A}_{2n}\setminus \mathrm{A}_n} \left|u_i\right|\left|v_j\right| = \sum_{(i,j)\in \mathrm{A}_{2n}} \left|u_i\right|\left|v_j\right| - \sum_{(i,j)\in \mathrm{A}_n} \left|u_i\right|\left|v_j\right|
\end{aligned}$$

D'où, $\forall n \geqslant 0$:

$$\mathrm{D}_n \leqslant \left(\sum_{i=0}^{2n}\left|u_i\right|\right)\left(\sum_{j=0}^{2n}\left|v_j\right|\right) - \left(\sum_{i=0}^{n}\left|u_i\right|\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\left|v_j\right|\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{D}_n = 0$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\right)$$

Idem pour le résultat sur $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$.

□

Remarques. 1. Si $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est absolument convergente et si la série $\sum_{k\geqslant 0} v_k$ est convergente, alors la série produit $\sum_{k\geqslant 0} w_k$ est convergente et on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\right)$$

2. Si $\sum_{k\geqslant 0} u_k, \sum_{k\geqslant 0} v_k$ sont convergentes et si $\sum_{k\geqslant 0} w_k$ converge, alors :

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\right)$$

Exemple. Soient deux séries :

$$\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^k, \sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Elles sont absolument convergentes, et on a :

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k &= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right) = 3$$

Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0} w_k \quad w_k = \sum_{i+j=k} u_i v_j = \sum_{p=0}^{k} u_p \cdot v_{k-p} &= \sum_{p=0}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-p}\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^k \sum_{p=0}^{k}\left(\frac{3}{2}\right)^p = \left(\frac{1}{3}\right)^k \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}}{1-\frac{3}{2}}\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^k \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}-1}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^k\left[2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}-2\right]\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\left\{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^k\times\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^k - 2\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}\\ &= 2\times\frac{3}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k\\ &= 3\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 2\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\\ &= 3\times 2 - 2\times\frac{3}{2} = 6-3 = 3\end{aligned}$$

I.2.3 Séries à termes positifs

Définition 8. $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est dite série à termes positifs si :

$$\forall k \geqslant 0 \quad u_k \geqslant 0$$

ou

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant k_0 \quad u_k \geqslant 0$$

Proposition 11. *Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles $(s_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée.*

Démonstration.

$$\begin{cases} s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \\ \forall k \geqslant 0 \quad u_k \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{n+1} - s_n = u_{n+1} \geqslant 0 \\ \forall n \geqslant 0 \end{cases}$$

Donc $(s_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. Ainsi, si $(s_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée alors $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge et réciproquement. □

Lemme 1. *(de comparaison) Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes positifs.*

1. *Supposons $\forall n \geqslant 0$ (ou à partir d'un certain rang) $u_n \leqslant v_n$. Alors, si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente on a $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ qui converge également. Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ l'est aussi.*
2. *Supposons $u_n \sim v_n \quad (n \to +\infty)$, c'est à dire $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.*

Démonstration.

1. Supposons $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergente.

$$\forall n \geqslant 0 \quad s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

$(s_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente, croissante et $\lim_{n\to\infty} s_n = s = \sum_{k=0}^{\infty} v_k$

$$\forall n \geqslant 0 \quad s_n \leqslant s$$

$$\forall n \geqslant 0 \quad u_n \leqslant v_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant s$$

Donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente car ses suites partielles sont majorées. Idem pour la divergence.

2. Supposons que $u_n \sim v_n$ au voisinage de $+\infty$. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1; \quad \frac{u_n}{v_n} = \alpha_n; \quad u_n = \alpha_n v_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 \Rightarrow \alpha_n \leqslant 2$$

donc $\forall n \geqslant 0 \quad u_n \leqslant 2v_n$, et :

$$\sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge}$$

$\square$

Exemples. 1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{ne^n}$

$$u_n = \frac{1}{ne^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{e^n} \leqslant \frac{1}{e^n} = e^{-n} = (e^{-1})^n$$
$$u_n = \frac{1}{ne^n} \leqslant v_n = (e^{-1})^n$$

Or $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente car $r = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$.

2. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$; $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; $v_n = \frac{1}{n}$; $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge et :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n+2}{4^n-11}$

$$u_n = \frac{3^n+2}{4^n-11} > 0 \quad \forall n \geqslant 2$$
$$u_n \sim v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad (n \to +\infty)$$

Or $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente car $\frac{3}{4} < 1$.

Définition 9.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{X\to\infty} \left\{ \int_a^X f(x)\,dx \right\}$$

Si cette limite est finie, l'intégrale (impropre) est dite convergente.

Proposition 12. *(comparaison avec une intégrale) Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante (au moins pour x assez grand). On pose $u_n = f(n)$ pour $n \geqslant a$. Alors $\sum_{n\geqslant a} u_n$ est convergente si et seulement si :*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \textit{est convergente.}$$

Démonstration. Supposons $a = 0$.

$$f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n) \quad \forall x \in [n, n+1]$$
$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$
$$u_{n+1} = f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n) = u_n \quad \forall n \geqslant 0$$

Alors :

$$u_1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant u_0$$
$$u_2 \leqslant \int_1^2 f(x)\,dx \leqslant u_1$$
$$\vdots$$
$$u_p \leqslant \int_{p-1}^{p} f(x)\,dx \leqslant u_{p-1}$$
$$\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_p}_{s_p - u_0} \leqslant \int_0^p f(x)\,dx \leqslant \underbrace{u_0 + u_1 + \cdots + u_{p-1}}_{s_{p-1}}$$

1^er^ cas : si $\sum_{k \geqslant 0} u_k$ converge, alors la suite croissante :

$$\left(\int_0^p f(x)\,dx \right)_{p \geqslant 0}$$

est majorée par $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = s$, donc convergente ; c'est a dire :

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^p f(x)\,dx \quad \text{existe.}$$

2^e^ cas : si

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

existe, la suite $(s_p - u_0)_{p \geqslant 0}$ est majorée par $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$, donc convergente et donc $(s_p)_{p \geqslant 0}$ l'est aussi. □

Application. Les séries de Rieman.

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

– Si $\alpha \leqslant 0$:

$$n^{-\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge}$$

– Si $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{x^\alpha}; \quad u_n = f(n) \end{aligned}$$

f est continue, positive et décroissante. On a :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ de même nature que } \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$$

Alors :

$$\int_1^X \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^X x^{-\alpha}\, dx = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^X = \left(\frac{X^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{X\to\infty} \int_1^X \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty \quad \text{si } \alpha = 1 \\ \text{existe si } 1-\alpha < 0 \\ \text{infinie si } 1-\alpha > 0 \end{cases}$$

Résultat :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ est convergente si et seulement si } \alpha > 1$$

I.2.4 Critères de convergence absolue

Proposition 13. *Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes quelconques. Soit $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ une série à termes positifs. On suppose :*

$$\forall n \geqslant 0 \quad |u_n| \leqslant v_n$$

Si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente, alors $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge, donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exemples. 1.

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n = \frac{\sin \omega n}{n^{3/2}}$$

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n^{3/2}} = v_n$$

Et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente car $\frac{3}{2} < 1$.

2.

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

Cette série converge, mais ne converge pas absolument. En effet :

$$\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$$

et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Proposition 14. *(Critère de Cauchy) Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série quelconque.*

1. *S'il existe $r \in]0,1[$ tel que $\forall n \geqslant 0 \quad \sqrt[n]{|u_n|} \leqslant r$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge.*
2. *Si, pour une infinité de n on a $\sqrt[n]{|u_n|} \geqslant 1$ alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.*
3. *Si la suite $(\sqrt[n]{|u_n|})_{n\geqslant 0}$ a une limite finie ℓ alors $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge si $\ell < 1$ et diverge si $\ell > 1$. Si $\ell = 1$ on ne peut rien dire de la nature de la série.*

Démonstration. 1.

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant k_0 \quad \sqrt[n]{|u_n|} \leqslant r \quad (r \in]0,1[)$$
$$\exists k_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant k_0 \quad |u_n| \leqslant r^n = v_n$$

$\sum_{n\geqslant 0} v_n = \sum_{n\geqslant 0} r^n$ est convergente car $r \in]0,1[$. Donc $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.

2.

$$\text{Pour une infinité de } n \quad \sqrt[n]{|u_n|} \geqslant 1$$
$$\text{Pour une infinité de } n \quad |u_n| \geqslant 1$$

Donc $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers 0 pour $n \to \infty$, donc $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers 0. D'où $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

3. $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$. On a donc $\ell \geqslant 0$.
   1[er] cas : $\ell < 1$. $\exists \varepsilon > 0 / \ell + \varepsilon_0 < 1$. Il suffit de prendre $\varepsilon_0 = \frac{1-\ell}{2}$.

$$\ell + \varepsilon_0 = \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{2\ell + 1 - \ell}{2} = \frac{\ell+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned}
&\left(\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}\right)\\
\iff &\left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \Rightarrow \left|\sqrt[n]{|u_n|} - \ell\right| \leqslant \varepsilon\right)\\
\iff &\left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \Rightarrow \ell - \varepsilon \leqslant \sqrt[n]{|u_n|} \leqslant \ell + \varepsilon\right)
\end{aligned}$$

   En particulier pour $\varepsilon_0 > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
&\exists \mathrm{N}_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant \mathrm{N}_0(\varepsilon) \Rightarrow \sqrt[n]{|u_n|} \leqslant \ell + \varepsilon_0 = r < 1\\
&\exists \mathrm{N}_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant \mathrm{N}_0(\varepsilon) \Rightarrow |u_n| \leqslant (\ell + \varepsilon_0)^r
\end{aligned}$$

   On applique 1 avec $r = \ell + \varepsilon_0 \in]0, 1[$.
   2[e] cas : $\ell > 1$.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 / \ell - \varepsilon_0 > 1$$

   Il suffit de prendre $\varepsilon_0 = \frac{\ell - 1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon, \exists \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \Rightarrow& \sqrt[n]{|u_n|} \geqslant \ell - \varepsilon\\
\text{Pour } \varepsilon_0, \exists \mathrm{N}_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant \mathrm{N}_0(\varepsilon) \Rightarrow& \sqrt[n]{|u_n|} \geqslant \ell - \varepsilon_0 > 1\\
& |u_n| \geqslant (\ell - \varepsilon_0)^n > 1
\end{aligned}$$

   Donc pour une infinité de n, $|u_n| > 1$ donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.
   Cas où $\ell = 1$: pas de conclusion. Exemples :
   (a) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge ; $|u_n| = u_n = \frac{1}{n}$.

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = n^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{-\ln(n)}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = \ell$$

   (b) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$.

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = n^{-\frac{2}{n}} = e^{-2\frac{\ln(x)}{n}} \to 1 = \ell$$

□

Proposition 15. *Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes non nuls (pas une infinité de termes nuls). Alors :*

1. *S'il existe $r \in]0,1[$ tel que pour n assez grand on a $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant r$, la série est absolument convergente.*
2. *Si pour n assez grand on a $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$, la série diverge.*
3. *Soit $\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$, alors :*

$$\begin{cases} \text{si } \ell < 1 & \sum_{n\geqslant 0} \left|u_n\right| \text{ converge} \\ \text{si } \ell > 1 & \sum_{n\geqslant 0} \left|u_n\right| \text{ diverge} \\ \text{si } \ell = 1 & \text{pas de conclusion} \end{cases}$$

Démonstration. 1. $\exists p_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant p_0 \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant r$ où $r \in]0,1[$. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} \left|u_{k+p_0}\right| &= \overbrace{\left|\frac{u_{k+p_0}}{u_{k+p_0-1}}\right| \left|\frac{u_{k+p_0-1}}{u_{k+p_0-2}}\right| \cdots \left|\frac{u_{k+p_0-(k-1)}}{u_{k+p_0-k}}\right|}^{k \text{ termes}} \left|u_{p_0}\right| \\ &\leqslant r^k \left|u_{p_0}\right| \quad \forall k \geqslant 1 \end{aligned}$$

Si $n = k + p_0$ qui varie, avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} \left|u_n\right| &\leqslant r^{n-p_0} \left|u_{p_0}\right| \\ &\leqslant \underbrace{\left(r^{-p_0} \left|u_{p_0}\right|\right)}_{\text{constante}} \cdot r^n \quad \forall n \geqslant p_0 \end{aligned}$$

$\sum_{n\geqslant 0}(\text{constante}) r^n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} \left|u_n\right|$ converge.

2. Si pour $n \geqslant p_1$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant p_1 \quad \left|u_{n+1}\right| \geqslant \left|u_n\right| \geqslant \left|u_{n-1}\right| \geqslant \cdots \geqslant \left|u_{p_1}\right| > 0 \\ \Rightarrow u_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n \quad \text{diverge} \end{aligned}$$

3. Cas où $\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ avec $\ell < 1$. $\exists \varepsilon_0 > 0 / \ell + \varepsilon_0 < 1$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \Rightarrow \ell - \varepsilon \leqslant \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \ell + \varepsilon$$

$$\text{Pour } \varepsilon_0 > 0, \exists \mathrm{N}_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant \mathrm{N}_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \underbrace{\ell + \varepsilon_0}_{r} < 1$$

et on applique 1 avec $r = \ell + \varepsilon_0 \in]0,1[$.
Cas où $\ell = 1$ et $\ell > 1$ en exercices.

□

Remarques. 1. Les deux critères restent vrais si on travaille avec :

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n|} \quad \text{et} \quad \overline{\lim} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$$

2. On verra en TD que si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ alors $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \ell$.

Exemples. 1. $\sum_{n\geqslant 1} n^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}; u_n = |u_n| = n^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{u_n} = \left[n^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} &= n\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= ne^{n\ln\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\ln\frac{1}{2}}\left[n\ln\left(\frac{1}{2}\right)e^{n\ln(1/2)}\right] \to 0 = \ell < 1\end{aligned}$$

$(xe^x \to 0 \text{ si } x \to -\infty)$

Donc la série converge.
Règle de d'Alembert : $u_n = n^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} > 0$

$$\begin{aligned}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)^2}}{n^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)e^{(2n+1)\ln(\frac{1}{2})} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{(n+1)}{(2n+1)\ln(\frac{1}{2})}(2n+1)\ln(\frac{1}{2})e^{(2n+1)\ln(\frac{1}{2})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1\end{aligned}$$

2. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^n n!}{n^n}$ $\quad a>0 \quad u_n>0$. Cauchy donne :

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{a}{n}\right)\underbrace{\sqrt[n]{n!}}_{\text{Stirling}}$$

Et d'Alembert :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{a^n n!} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \times (n+1) \\ &= \frac{a}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{e} = \ell\end{aligned}$$

Alors :
- Si $a<e$ (donc $\ell<1$), convergence de la série.
- Si $a>e$ (donc $\ell>1$), divergence de la série.
- Si $a=e$ (donc $\ell=1$) :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{e}{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad (x\to 0) \\ e^u &= 1+u+\frac{u^2}{2}+\dots \quad (u\to 0) \\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n\to+\infty)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} &= e^{n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} \\ &= e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1}{e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) > 1 \quad (n\to+\infty)\end{aligned}$$

car

$$\frac{1}{1-v} = 1+v+o(v) \quad (v\to 0)$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ par valeurs supérieures, donc la série diverge.

I.2.5 Séries alternées

Définition 10. $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est dite série alternée si et seulement si :

$$\forall n \geqslant 0 \quad u_n = (-1)^n v_n \quad \text{où } v_n \geqslant 0$$

On convient que $(-1)^0 = 1$.

Exemple.

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Proposition 16. *Soit $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n v_n$ une série alternée avec $v_n \geqslant 0$. On suppose que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de termes positifs et décroissante vers 0. Alors $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n v_n$ est convergente.*

Démonstration.

$$s_p = \sum_{n=0}^{p}(-1)^n v_n = v_0 - v_1 + v_2 + \cdots + (-1)^p v_p \quad p \geqslant 0$$

$(s_{2p})_{p\geqslant 0}, (s_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ deux suites extraites de $(s_p)_{p\geqslant 0}$.

– Suite $(s_{2p})_{p\geqslant 0}$:

$$\begin{aligned} s_{2(p+1)} - s_{2p} &= (-1)^{2p+2} v_{2p+2} + (-1)^{2p+1} v_{2p+1} \\ &= v_{2p+2} - v_{2p+1} \leqslant 0 \end{aligned}$$

donc $(s_{2p})_{p\geqslant 0}$ est décroissante.

– Suite $(s_{2p+1})_{p\geqslant 0}$

$$\begin{aligned} s_{2(p+1)+1} - s_{2p+1} &= s_{2p+3} - s_{2p+1} \\ &= (-1)^{2p+3} v_{2p_3} + (-1)^{2p+2} v_{2p+2} \\ &= v_{2p+2} - v_{2p+3} \geqslant 0 \end{aligned}$$

donc $(s_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ est croissante.

$$\begin{aligned} (s_{2p+1} - s_{2p}) &= (-1)^{2p+1} v_{2p+1} = -v_{2p+1} \leqslant 0 \\ \lim_{p\to\infty}(s_{2p+1} - s_{2p}) &= -\lim_{p\to\infty} v_{2p+1} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $(s_{2p})_{p\geqslant 0}$ et $(s_{2p+1})_{p\geqslant 0}$ sont adjacentes et donc :

$$\lim_{p\to\infty} s_{2p} = \lim_{p\to\infty} s_{2p+1} = s = \lim_{p\to\infty} s_p = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n v_n$$

De plus on a :

$$\forall p \geqslant 0 \quad s_{2p+1} \leqslant s \leqslant s_{2p}$$

□

Exemple.

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

Ici :

$$v_n=\frac{1}{n+1}>0 \quad v_n \searrow_0$$

La série n'est pas absolument convergente. Pour $p=2$:

$$\underbrace{s_5}_{\text{valeurs par défaut}} \leqslant s=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=0,69\cdots\leqslant \underbrace{s_4}_{\text{valeurs par excès}}$$

Calculons :

$$s_5=\sum_{n=0}^{5}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\simeq 0,62\ldots$$
$$s_4=\sum_{n=0}^{5}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\simeq 0,78\ldots$$

Proposition 17. *(Règle d'Abel ; cas général) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ réelle ou complexe et $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres positifs vérifiant :*

1. *$(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$*
2. *Majoration uniforme en n de s_n :*

$$\exists \mathrm{A}>0, \quad \forall n\geqslant 0 \quad \left|s_n\right|=\left|a_0+a_1+\cdots+a_n\right|\leqslant \mathrm{A}$$

Alors la série $\sum_{n\geqslant 0}\lambda_n a_n$ est convergente.

Démonstration. Montrons que le critère de Cauchy est satisfait :

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}/\forall n,p\geqslant n_0(\varepsilon) \text{ (avec } p>n)$$
$$\Rightarrow \left|\mathrm{R}_{n,p}\right|=\left|\lambda_{n+1}a_{n+1}+\lambda_{n+2}a_{n+2}+\cdots+\lambda_p a_p\right|\leqslant\varepsilon$$

$n,p \quad p>n$:

$$\left|\lambda_{n+1}a_{n+1}+\lambda_{n+2}a_{n+2}+\cdots+\lambda_p a_p\right|=?$$

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$
$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n, \quad a_n = s_n - s_{n-1}, \quad \ldots$$

$$\begin{aligned}
&\left|\lambda_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + \lambda_{n+2}(s_{n+2} - s_{n+1}) + \lambda_{n+3}(s_{n+3} - s_{n+2}) + \cdots + \lambda_p(s_p - s_{p-1})\right| \\
&= \left|-\lambda_{n+1}s_n + s_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2}) + \cdots + s_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p) + \lambda_p s_p\right| \\
&\leqslant \mathrm{A}\left[\lambda_{n+1} + \lambda_{n+1} - \lambda_{n+2} + \lambda_{n+2} - \lambda_{n+3} + \cdots + \lambda_{p-1} - \lambda_p + \lambda_p\right] \\
&\leqslant 2\lambda_{n+1}\mathrm{A} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Donc $\left|\mathrm{R}_{n,p}\right| \leqslant \varepsilon$ pour $n \to +\infty$. □

Exemples.

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n v_n$$

avec v_n décroissante vers 0 et $v_n \geqslant 0$.

$$v_n = \lambda_n$$
$$(-1)^n = a_n$$
$$\left|s_n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right| \leqslant 1 = \mathrm{A} \quad \forall n \geqslant 0$$

Série trigonométrique :

$$\sum_{n\geqslant 0}\lambda_n e^{in\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ une suite positive et décroissante vers 0. Pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta; \quad \left|e^{i\theta}\right| = 1$$

D'où :

$$e^{in\alpha} = (e^{i\alpha})^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

Si $\alpha = 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ alors $e^{2ik\pi} = 1$. Supposons $\alpha \neq 2k\pi$.

$$\begin{aligned}
a_n &= e^{in\alpha} \\
s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n &= 1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \cdots + e^{ni\alpha} \\
&= 1 + e^{i\alpha} + (e^{i\alpha})^2 + \cdots + (e^{i\alpha})^n \\
&= \frac{1 - (e^{i\alpha})^{n+1}}{1 - e^{i\alpha}}
\end{aligned}$$

Car on a une série géométrique. On doit alors majorer uniformément $\left|s_n\right|$:

$$\begin{aligned}\left|s_n\right| = \left|\frac{1-e^{i(n+1)\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right| \leqslant \frac{1+\left|e^{i(n+1)\alpha}\right|}{\left|1-e^{i\alpha}\right|} &= \frac{2}{\left|1-e^{i\alpha}\right|}\\ &= \frac{2}{|1-\cos\alpha - i\sin\alpha|}\\ &= \frac{2}{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{2-2\cos\alpha}}\end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos 2\frac{\alpha}{2}\\ &= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\\ &= 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\\ 2cos\alpha &= 2-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

D'où :

$$\left|s_n\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \mathrm{A}$$

Donc, si $(\lambda_n)_{n\geqslant 0} \searrow_0$, les séries :

$$\sum_{n\geqslant 0}\lambda_n \sin n\alpha, \quad \sum_{n\geqslant 0}\lambda_n\cos n\alpha$$

sont convergentes si $\alpha \neq 2k\pi$.

Par exemple :

$$\begin{gathered}\sum_{n\geqslant 0}\frac{\sin n\alpha}{n}, \quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos n\alpha}{n}\\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{\sin n\alpha}{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos n\alpha}{n^2}, \quad \text{etc.}\dots\end{gathered}$$

I.2.6 Associativité et commutativité dans les séries

Associativité

Exemple. $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n$ diverge car $(-1)^n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Or, si la série était associative, on pourrait effectuer :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n &= 1-1+1-1+1\dots \\ &= (1-1)+(1-1)+\dots \\ &= 0+0+0+\dots\end{aligned}$$

Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante, avec $f(0)=0$ et définie par $x\mapsto f(n)=p_n$. Alors :

$$\forall n\geqslant 0 \quad f(n)\geqslant n$$

Car si $n=0$, $f(0)=0\geqslant 0$. Supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $f(n)\geqslant n$, alors $f(n+1)>f(n)$ car f est strictement croissante, donc $f(n+1)>f(n)\geqslant n$. Et $f(n+1)>n$ implique $f(n+1)\geqslant n+1$.

Soit $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ une série quelconque. Posons :

$$\begin{aligned}v_n &= u_{f(n)}+u_{f(n)+1}+u_{f(n)+2}+\dots+u_{f(n+1)-1} \\ &= u_{p_n}+u_{p_n+1}+\dots+u_{p_{n+1}-1} \\ &= u_{f(n)+0}+u_{f(n)+1}+\dots+u_{f(n)+\left[f(n+1)-f(n)-1\right]}\end{aligned}$$

Il y a donc $\left[f(n+1)-f(n)\right]$ éléments dans v_n, qu'on appelle paquets d'éléments.

Exemple.

$$\begin{aligned}f:&\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ &n\mapsto f(n)=2n\end{aligned}$$

On a f strictement croissante et $f(0)=0$.

$$\sum_{n\geqslant 0}u_n; \quad v_n=u_{f(n)}+\dots+u_{f(n+1)-1}$$

Or :

$$f(n+1)-1=2(n+1)-1=2n+2-1=2n+1$$

Donc :

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$$

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} v_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots \\ &= (u_0 + u_1) + (u_2 + u_3) + \dots\end{aligned}$$

On somme bien les u_n par paquets.

Proposition 18. *Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente. L'associativité dans la sommation infinie est donc vraie s'il y a convergence dans la série, mais la réciproque est fausse.*

Démonstration. $(s_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente par hypothèse.

$$\begin{aligned}s_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ \mathrm{S}_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n = \sum_{n\geqslant 0} v_n \\ &= \left(u_{p_0} + u_{p_0+1} + \dots + u_{p_1-1}\right) + \left(u_{p_1} + u_{p_1+1} + \dots + u_{p_2-1}\right) \\ &\qquad + \dots + \left(u_{p_n} + u_{p_n+1} + \dots + u_{p_{n+1}-1}\right) \\ &= \left(u_{f(0)} + u_{f(0)+1} + \dots + u_{f(1)-1}\right) + \left(u_{f(1)} + u_{f(1)+1} + \dots + u_{f(2)-1}\right) \\ &\qquad + \dots + \left(u_{f(n)} + u_{f(n)+1} + \dots + u_{f(n+1)-1}\right) \\ &= \left(u_0 + u_1 + \dots + u_{f(1)-1}\right) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{f(n+1)-1} u_k = s_{f(n+1)-1} = s_{p_{n+1}-1}\end{aligned}$$

Donc $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite extraite de $(s_n)_{n\geqslant 0}$, donc $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente. De plus, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

□

Proposition 19. *Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs. Alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente si et seulement si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente.*

Démonstration. On sait déjà que :

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ converge}$$

Réciproquement, supposons $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergente. On a :

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \quad (s_n)_{n\geqslant 0} \nearrow s_{f(n+1)-1} = s_{p_{n+1}-1} = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont majorées uniformément par rapport à n.

$$\begin{aligned}
& n \leqslant p_n = f(n) \leqslant p_{n+1} - 1 = f(n+1) - 1 \\
& \Rightarrow s_n \leqslant s_{p_n} = s_{f(n)} \leqslant s_{p_{n+1}-1} = s_{f(n+1)-1} \quad \text{car } (s_n)_{n\geqslant 0} \nearrow \\
& \qquad = \sum k = 0^n v_k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} v_k = \mathrm{A} \\
& \forall n \geqslant 0 \quad s_n \leqslant \mathrm{A}
\end{aligned}$$

Donc $(s_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente. □

Proposition 20. *(admise) Soit une série $\sum_{n\geqslant 0}$ une série numérique quelconque, avec $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (u_n est de signe quelconque). On suppose qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{N}^*$ tel que :*

$$\forall n \geqslant 0 \quad f(n+1) - f(n) = p_{n+1} - p_n \leqslant \mathrm{A}$$

C'est à dire que les paquets de sommation ne dépassent pas A éléments. Alors $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente si et seulement si $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente.

Exemple. Contre exemple :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} v_n &= \left(0 + 1 + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) \\
&+ \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right)
\end{aligned}$$

Commutativité (Changement de l'ordre des termes)
Peut-on commuter les termes de la sommation infinie ? C'est à dire, a-t-on :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} u_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \ldots \\
&= u_1 + u_0 + u_3 + u_2 + \ldots
\end{aligned}$$

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Posons :

$$\forall n \geqslant 0 \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

Si par exemple φ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\varphi(2n) = 2n+2$ et $\varphi(2n+1) = 2n-1$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} v_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots \\ &= u_0 + u_2 + u_1 + u_4 + \dots\end{aligned}$$

Proposition 21. *(admise) Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente alors $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est absolument convergente pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

On dira alors que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est commutativement convergente.

I.2.7 Majoration du reste d'une série convergente

Soient $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ convergente et $s = \sum_{k=0}^{\infty} u_n$. s est généralement difficile à calculer. On cherche a obtenir s à ε près.

$$r_n = s - s_n$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0; \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

Cas d'une série relevant du critère d'Abel (séries alternée) $u_n = (-1)^n v_n$ avec u_n décroissante vers 0. $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n v_n$ converge.

$$\forall p \geqslant 0 \quad s_{2p+1} \leqslant s = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n v_n \leqslant s_{2p}$$

Si $n = 2p$, on a :

$$\forall n \geqslant 0 \quad s_{n+1} \leqslant s \leqslant s_n$$

Si $n = 2p - 1$:

$$\forall n \geqslant 0 \quad s_n \leqslant s_{n+2} \leqslant s \leqslant s_{n+1}$$

Si n est pair : $\left|s - s_n\right| = s_n - s \leqslant s_n - s_{n+1}$.
Si n est impair : $\left|s - s_n\right| = s - s_n \leqslant s_{n+1} - s_n$. Donc $\forall n \geqslant 0$, on a :

$$\left|s - s_n\right| \leqslant \left|s_{n+1} - s_n\right| = \left|(-1)^{n+1} v_{n+1}\right| = \left|u_{n+1}\right| = v_{n+1}$$

Conclusion :

$$\forall n \geqslant 0 \quad \left|r_n\right| \leqslant v_{n+1}$$

Si on veut s à ε près, donc r_n à ε près, il suffit de chercher n tel que $v_{n+1} \leqslant \varepsilon$.

Exemple.

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \quad v_n = \frac{1}{n+1} > 0$$

On a v_n décroissante vers 0. Si on veut s à $\varepsilon = 0,001$ près, il suffit que :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &\leqslant 0,001 \\ \iff \frac{1}{n+2} &\leqslant \frac{1}{98+2} \end{aligned}$$

Donc il suffit de calculer s_n à $n = 98$.

$$\sum_{k=0}^{98} \frac{(-1)^k}{k+1} = s \text{ à } 0,01 \text{ près}$$

Cas d'une série relevant du critère de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ avec :

$$\forall n \geqslant 0 \quad \sqrt[n]{\left|u_n\right|} \leqslant \ell < 1$$

On a donc $\sum_{n\geqslant 0} \left|u_n\right|$ convergente. Ici : $\left|u_n\right| \leqslant \ell^n \quad \forall n \geqslant 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \left|s - s_n\right| = \left|r_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \ell^k \\ \left|r_n\right| \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \ell^{n+1+p} &= \ell^{n+1} \sum_{p=0}^{\infty} \ell^p = \frac{\ell^{n+1}}{1-\ell} \end{aligned}$$

Si on veut s à ε près, on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\ell^{n+1}}{1-\ell} &\leqslant \varepsilon \\ \ell^{n+1} &\leqslant \varepsilon(1-\ell) \\ (n+1)\ln(\ell) &\leqslant \ln(\varepsilon) + \ln(1-\ell) \\ n+1 &\geqslant \frac{\ln(\varepsilon) + \ln(1-\ell)}{\ln(\ell)} \end{aligned}$$

Il suffit de choisir n_0 tel que :

$$n_0 \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{\ln(\varepsilon) + \ln(1-\ell)}{\ln(\ell)}\right) + 1$$

Ainsi, $s_{n_0} \sim s$ à ε près.

Cas d'une série relevant du critère de d'Alembert $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ avec :

$$\forall n \geqslant 0 \quad u_n \neq 0,$$
$$\forall n \geqslant 0 \quad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \ell < 1$$

Donc $\sum_{n\geqslant 0} \left|u_n\right|$ converge. On a montré que :

$$\forall p \geqslant 0 \quad \left|u_{n+p}\right| \leqslant \ell^p \left|u_n\right|$$

D'où :

$$\begin{aligned}\left|s - s_n\right| = \left|r_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|u_k\right| = \sum_{p=1}^{\infty} \left|u_{n+p}\right| \\ \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \ell^p \left|u_n\right| = \left|u_n\right| \sum_{p=1}^{\infty} \ell^p = \left|u_n\right| \frac{\ell}{1-\ell}\end{aligned}$$

Pour avoir s à ε près, il suffit de calculer s_n avec n tel que :

$$\left|u_n\right| \leqslant \frac{(1-\ell)\varepsilon}{\ell} = \text{ quantité connue}$$

Chapitre II

Les séries de fonctions

II.1 Rappel sur les suites de fonctions

II.1.1 Définitions

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions : $\forall n \geqslant 0 \quad f_n : \mathrm{E} \to \mathbb{K}$ où E est un ensemble quelconque. Soit $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$.

Définition 11. (Convergence simple) On dira que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ simplement sur A si et seulement si :

$$\forall x \in \mathrm{A} \quad \big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } f(x) \text{ pour } n \to +\infty$$

C'est la convergence point par point sur A. On écrit aussi :

$$\forall x \in \mathrm{A} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}(x,\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant \mathrm{N}(x,\varepsilon) \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

Définition 12. On dira que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformément sur A par rapport à la variable x si et seulement si :

$$\sup_{x\in\mathrm{A}} \left|f_n(x) - f(x)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ce qui s'écrit également :

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}(\varepsilon) / \forall n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \text{ et } \forall x \in \mathrm{A} \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon \\ \Longleftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}(\varepsilon) / \forall n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \Rightarrow sup_{x\in\mathrm{A}} \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon\end{gathered}$$

Proposition 22. *Si* $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ *uniformément sur* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$ *alors* $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ *simplement sur* A*. La réciproque est fausse.*

Exemples. 1. $E = \mathbb{R}$; $A = [0,1]$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : [0,1] \to \mathbb{N}$$

$$x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} (n+2)x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n+2} \\ 2-(n+2)x & \text{si} \quad \frac{1}{n+2} < x \leqslant \frac{2}{n+2} \\ 0 \quad \text{si} \quad \frac{2}{n+2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

f_n est affine par morceaux. Pour $n \in \mathbb{N}$ donné :
Convergence simple ?
– si $x = 0$ $\quad f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
– si $x > 0 (x \in]0,1])$, $\frac{2}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc il existe un entier $N(x)$ tel que :

$$\forall n \geqslant N(x) \Rightarrow \frac{2}{n+2} \leqslant x$$

et :

$$\forall n \geqslant N(x) \quad f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ simplement sur $[0,1]$.
Convergence uniforme ?

$$\sup_{x\in A} \left| f_n(x) - f(x) \right| = \sup_{x\in[0,1]} \left| f_n(x) \right| = 1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pas de convergence uniforme.

2. $E = \mathbb{R}$; $A_0 = [0,1]$

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f_n(x) = x^n$$

Considérons $A_1 = [0,1[$, $A_2 = [0,\rho]$ où $\rho < 1$.
1^{er} cas (sur A_0) :
– si $x = 1$ $\quad f_n(1) = 1^n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$
– si $x \in [0,1[$ $\quad f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
D'où la convergence simple sur A_0 vers la fonction f_0 définie par :

$$f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Pas de convergence uniforme, sinon f_0 serait continue.
2e cas (sur A_1) :

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ simplement sur } A_1$$

Pas de convergence uniforme car $\sup_{x\in A_1}\left|f_n(x)\right| = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3e cas (sur A_2) :
– $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ simplement sur A_2.
–

$$\sup_{n\in A_2}\left|f_n(x)-0\right| = \sup_{x\in A_2}|x^n| = \rho^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Il y a convergence uniforme sur A_2.

II.1.2 Propriétés

1. Si $f_n : E \to \mathbb{C}$; $\forall x \in E \quad f_n(x) = \alpha_n(x) + i\beta_n(x)$ où $\alpha_n(x), \beta_n(x) \in \mathbb{R}$. On dira alors :

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f = \alpha + i\beta \text{ simplement (resp. uniformément) sur A}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \text{ et } \beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta \text{ simplement (resp. uniformément) sur A}$$

2. Si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ simplement sur A et $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ simplement sur A, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $(f_n \pm g_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f \pm g$ simplement sur A et $\lambda f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda f$ simplement sur A. Idem pour la convergence uniforme.
De même pour $f_n \dots g_n$, $\frac{f_n}{g_n}$ si $g_n \neq 0, \dots$.
3. Cas de fonctions à valeurs réelles et à variable réelle.
Continuité

$$\begin{aligned} f\ :& I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

Soit $x_0 \in I$.

$$f \text{ est continue en } x_0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon, x_0) > 0 \quad \forall x : \left|x - x_0\right| \leqslant \eta(\varepsilon, x_0) \Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| \leqslant \varepsilon\right)$$

Primitive Soit f une fonction continue sur I. On pose :

$$\begin{aligned} \mathrm{F} : \mathrm{I} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathrm{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \end{aligned}$$

F est la primitive de f qui s'annule en x_0 :

$$\mathrm{F}(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{F}'(x) = f(x)$$

F est donc de classe C^1 sur I (continûment dérivable).

Dérivation

$$g : \mathrm{I} \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathrm{I}$$

$$g \text{ est dérivable en } x_0 \iff \left(\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \text{ existe} \right)$$

et alors on écrira :

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Théorème 1. *(stabilité de la continuité) Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$ fixé. On suppose que $\forall n \geqslant 0 \quad f_n$ est continue en x_0 et $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ uniformément sur* I. *Alors f est continue en x_0.*

Remarque.

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} f_n(x) &= f(x) \quad \text{(uniformément sur I)} \\ \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) &= \lim_{x \to x_0} \left(f(x) \right) \\ \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) &= f(x_0) \\ \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) &= f(x_0) \end{aligned}$$

Démonstration. $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ uniformément sur I, d'où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant \mathrm{N}_0(\varepsilon), \forall x \in \mathrm{I} \Rightarrow \left| f_n(x) - f(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

$f_{N_0(\varepsilon)}$ est continue en x_0, donc :

$$\exists \eta(\varepsilon, x_0) > 0, \forall x : \left|x - x_0\right| \leqslant \eta(\varepsilon, x_0) \Rightarrow \left|f_{N_0(\varepsilon)}(x) - f_{N_0(\varepsilon)}(x_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Alors pour $\left|x - x_0\right| \leqslant \eta(\varepsilon, x_0)$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left|f(x) - f(x_0)\right| = \left|f(x) - f_{N_0(\varepsilon)}(x) + f_{N_0(\varepsilon)}(x) - f_{N_0(\varepsilon)}(x_0) + f_{N_0(\varepsilon)}(x_0) f(x_0)\right| \\
&\leqslant \left|f(x) - f_{N_0(\varepsilon)}(x)\right| + \left|f_{N_0(\varepsilon)}(x) - f_{N_0(\varepsilon)}(x_0)\right| + \left|f_{N_0(\varepsilon)}(x_0) - f(x_0)\right| \\
&\leqslant \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{convergence uniforme}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{continuité}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3}}_{\text{convergence uniforme}}
\end{aligned}$$

□

Théorème 2 (Intégrabilité de la fonction limite). *Soit* $I = [a, b]$ $(a < b)$. *Soit* $(f_n)_{n \geqslant 0}$ *une suite de fonctions continues sur* I. *On suppose que :*

$$f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f \text{ uniformément sur } I$$

Soit $x_0 \in I$ *fixé et* $(F_n)_{n \geqslant 0}$ *la suite définie par :*

$$\forall x \in I \quad F_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)\, dt$$

Alors $(F_n)_{n \geqslant 0}$ *converge uniformément vers la fonction* F *définie par :*

$$\forall x \in I \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

En particulier :

$$\int_a^b f_n(t)\, dt \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^b f(t)\, dt$$

Démonstration. 1. $\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ est bien définie car f est continue.

2.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant N(\varepsilon), \forall x \in I, \left|f_n(t) - f(t)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Pour $n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)$, $\forall x \in \mathrm{I}$:

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}(x)\right| &= \left|\int_{x_0}^{x} \left(f_n(t) - f(t)\right)\, dt\right| \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} \left|f_n(t) - f(t)\right|\, dt \quad (\text{si } x > x_0) \\
&\leqslant \int_{a}^{b} \left|f_n(t) - f(t)\right|\, dt \\
&\leqslant \int_{a}^{b} \frac{\varepsilon}{b-a}\, dt = \varepsilon
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{F}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{F}$ uniformément sur I.

3. Il suffit de prendre $x = b$ et $x_0 = a$.

□

Remarque. S'il y a convergence uniforme :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{x_0}^{x} f_n(t)\, dt\right) = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt$$

Théorème 3 (Stabilité de la dérivation)**.** *Soit* $\mathrm{I} = [a, b], a < b$. *Soit* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite d'applications continûment dérivables sur* I*. On suppose :*

1. $\exists x_0 \in \mathrm{I} / \left(f_n(x_0)\right)_{n\geqslant 0}$ *converge vers* ℓ*.*
2. $(f_n')_{n\geqslant 0}$ *converge uniformément sur* I *vers* g*.*

Alors $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *converge uniformément vers une fonction* f *sur* I*;* f *est dérivable sur* I *et* $f' = g$ *(donc* $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$*).*

Démonstration. Notons $\ell = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ et $(\mathrm{G}_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathrm{I} \quad \mathrm{G}_n(x) &= \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt \\
&= f_n(x) - \underbrace{f_n(x_0)}_{\text{constante}}
\end{aligned}$$

D'après le théorème précédent, $(\mathrm{G}_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers la fonction G définie par :

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad \mathrm{G}(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

On en déduit que $\big(G_n + f_n(x_0)\big)_{n\geqslant 0} = (f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $G+\ell$ sur I.

Posons :

$$\forall x \in I \quad f(x) = G(x) + \ell$$
$$= \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt + \ell$$

f est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I \quad f'(x) = g(x) + 0$$

Donc $f' \in C(I)$, et $f \in C^1(I)$. □

Exemple. $I = [0,1]$; $f_n : x \mapsto f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

– $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ uniformément sur I (donc $f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = \ell$) :

$$\sup_I \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

– $f_n' : x \mapsto f_n'(x) = x^n$, donc $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ simplement sur I où :

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

g n'est pas continue.

II.1.3 Le critère uniforme de Cauchy

Proposition 23. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $A \subseteq E$ si et seulement si on a :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p,q \geqslant N(\varepsilon) \textit{ et } \forall x \in A \Rightarrow \left|f_p(x) - f_q(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration. 1. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0} : f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformément sur I.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant N(\varepsilon), \forall x \in A \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors, si $p,q \geqslant N(\varepsilon)$:

$$\forall x \in A \quad \left|f_p(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\left|f_q(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\left|f_p(x)-f_q(x)\right| &= \left|f_p(x)-f(x)+f(x)-f_q(x)\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathrm{A}$ donné, alors la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\geqslant 0}$ est du Cauchy dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Donc $\left(f_n(x)\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers une fonction de x, notée $f(x)$, d'après l'unicité de la limite. Donc $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ simplement sur A.

   On passe à la limite (sur p) lorsque $p \to +\infty$:

$$\forall\varepsilon>0, \exists \mathrm{N}(\varepsilon)\in\mathbb{N}/\forall q \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon), \forall x\in\mathrm{A} \Rightarrow \lim_{p\to\infty}\left|f_p(x)-f_q(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

$$\lim_{p\to\infty}\left|f_p(x)-f_q(x)\right| = \left|f(x)-f_q(x)\right|$$

   Donc $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformément sur A.

□

II.2 Séries de fonctions

II.2.1 Définitions

Définition 13. Soient E un ensemble, $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$. On pose :

$$\forall n\geqslant 0 \quad s_n=\sum_{k=0}^{n} f_k$$

somme partielle à l'ordre n de $(f_n)_{n\geqslant 0}$. On a :

$$\forall n\geqslant 0, \forall x\in\mathrm{E} \quad s_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

On appelle série de fonctions de terme général f_n, la suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$.

Notation. $(s_n)_{n\geqslant 0}$; $\left(s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\right)$; $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ sont des notations équivalentes.

Définition 14. Soit $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{E}$. On dira que la série $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge simplement sur A vers s si et seulement si la suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur A vers s.

On a alors :

$$\forall x \in \mathrm{A} \quad s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{(écriture simple)}$$
$$s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{(écriture simple)}$$

Définition 15. Soit $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$. On dira que la série $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge uniformément vers s sur A si et seulement si $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$ uniformément sur A et on écrit :

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k = s \quad \text{(écriture uniforme sur A)}$$

Définition 16. Soit $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$. On dira que la série $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge normalement sur A si et seulement si :

1. Il existe une série numérique $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ à termes positifs telle que $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge, et
2. $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_0, \forall x \in \mathrm{A} \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant u_n$.

Exemple. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(nx)}{1+n^2}$; $f_k(x) = \frac{\cos(kx)}{1+k^2}$. On prend $\mathrm{E} = \mathbb{R} = \mathrm{A}$.

$$u_n = \frac{1}{1+n^2}$$
$$\forall n \geqslant n_0 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\frac{\cos(nx)}{1+n^2}\right| \leqslant u_n$$

et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

II.2.2 Propriétés

Proposition 24. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définie sur $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$; $f_n : \mathrm{E} \to \mathbb{K}$. Alors :*

1. *Si $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur A, alors $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur A.*
2. *Si $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge simplement (resp. uniformément) sur A, alors la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement (resp. uniformément) vers 0 sur A.*

3. *Si $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge simplement sur* A*, posons :*

$$r_n = s - s_n \qquad s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \textit{simple}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathrm{A} \quad r_n(x) &= s(x) - s_n(x) \\ &= s(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \end{aligned}$$

Alors, si $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ simplement (resp. uniformément) sur A*, alors $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge simplement (resp. uniformément) sur* A.

Démonstration. 1. $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$; s_n converge uniformément vers s sur A donc $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$ simplement sur A d'où la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.

2. $\forall x \in \mathrm{A}$ $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ est convergente, donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où le résultat.

□

Théorème 4. *Soit $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ une série de fonctions avec $f_n : \mathrm{E} \to \mathbb{K}$ et soit $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$. Si $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge normalement sur* A*, alors $\forall x \in \mathrm{A}$ la série $\sum_{n\geqslant 0} \left|f_n(x)\right|$ converge, et $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge uniformément sur* A.

Démonstration. $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ est convergente normalement sur A : donc $\exists (u_n)_{n\geqslant 0}$ avec $u_n \geqslant 0$ et :

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge,} \quad \forall x \in \mathrm{A}, \forall n \geqslant n_0 \quad \left|f_n(x)\right| \leqslant u_n$$

$\forall x \in \mathrm{A}$ $\sum_{n\geqslant 0} \left|f_n(x)\right|$ est convergente grâce au lemme de comparaison, d'où les convergences simple et absolue.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathrm{A} \quad r_n(x) &= s(x) - s_n(x) \quad s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathrm{A} \quad \left|r_n(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = \mathrm{R}_n$$

$$\forall x \in \mathrm{A} \quad \left|r_n(x)\right| \leqslant \mathrm{R}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

où R_n est le reste de la série convergente $\sum_{k\geqslant 0} u_k$. Donc $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ uniformément sur A. □

II.2.3 Continuité, intégrabilité et dérivabilité de la somme d'une série de fonctions

Proposition 25. *Soient* $(f_n)_{n\geqslant 0}, (g_n)_{n\geqslant 0}$ *deux suites de fonctions définies sur* E. *Soient* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, $\alpha \in \mathbb{K}$. *Si* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ *convergent simplement (resp. uniformément) sur* A, *alors :* $\sum_{n\geqslant 0} (f_n \pm g_n)$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} \alpha f_n$ *convergent simplement (resp. uniformément) sur* A.

Proposition 26. *Si* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *est une suite de fonctions à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *définies sur* E, *et si* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$. $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge simplement (resp. uniformément) sur* A *si et seulement si* $\sum_{n\geqslant 0} \Re(f_n)$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} \Im(f_n)$ *converge simplement sur* A *(resp. uniformément).*

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur I intervalle réel.

Théorème 5 (stabilité de la continuité)**.** *Soit* $x_0 \in \mathrm{I}$. *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *une série de fonctions où* $\forall n \geqslant 0$, $f_n : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ *et* f_n *continue en* x_0. *Si* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge uniformément sur* I *vers* s, *alors* s *est continue en* x_0.

Démonstration. $\forall x \in \mathrm{I}$, $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = s(x)$ (écriture uniforme).

$$\forall n \geqslant 0 \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$
$$\forall x \in \mathrm{I} \quad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$
$$\forall n \geqslant 0 \quad f_n \text{ est continue en } x_0$$

$\forall n \geqslant 0$, s_n est continue en x_0.

$$\left.\begin{array}{r} s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s \text{ uniformément sur I} \\ \forall n \geqslant 0, s_n \text{ continue en } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow s \text{ est continue en } x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} s(x) = s(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x)$$

□

Théorème 6 (intégrabilité de la somme)**.** *Soit* $\mathrm{I} = [a, b]$*,* $a < b$*. Soient* $x_0 \in \mathrm{I}$ *et* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de fonctions continues sur* I*,* $f_n : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$*. On suppose que* $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ *converge uniformément sur* I*. Soit* $(\mathrm{F}_n)_{n\geqslant 0}$ *la suite définie par :*

$$\forall x \in \mathrm{I} \quad \mathrm{F}_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$$

Alors $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{F}_n$ *converge uniformément sur* I *et sa somme* S *est l'application :*

$$\begin{aligned} \mathrm{S} :& \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \mathrm{S}(x) = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \right) dt \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\sum_{k\geqslant 0} f_k \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k = s$$

$$\forall n \geqslant 0 \quad s_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)$$

$$s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s \text{ uniformément sur I}$$

$$\forall n \geqslant 0 \quad f_n \text{ est continue}$$

Alors :

$$\int_{x_0}^{x} s(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \left(sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x} f_k(t)\,dt \right)$$

Grâce à l'intégrabilité des suites de fonctions. □

Théorème 7 (dérivabilité de la somme)**.** *Soit* $\mathrm{I} = [a, b]$ *avec* $a < b$*. Soit* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de fonctions définies sur* I *et continûment dérivables. On suppose qu'il existe* $x_0 \in \mathrm{I}$ *tel que* $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x_0)$ *converge. On suppose de plus que* $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ *converge uniformément sur* I*. Alors* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge uniformément sur* I*, et* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *est dérivable, et de plus* $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$*.*

On dit que l'on peut dériver terme à terme une série de fonctions.

Démonstration. On pose :

$$\forall n \geqslant 0 \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k'$$

On a $s'_n = g_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Comme $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x_0)$ converge, $\big(s_n(x_0)\big)_{n\geqslant 0}$ suite convergente. Et comme $(s'_n)_{n\geqslant 0} = (g_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I, on a $(s_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers s, et s est dérivable et on a $s' = g = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$. □

II.2.4 Critère uniforme de Cauchy pour les séries de fonctions

Proposition 27 (C.U.C.)**.** *Soit* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *une série de fonctions :* $\forall n \geqslant 0 \quad f_n : \mathrm{E} \to \mathbb{K}$. *Alors la série* $\sum_{n\geqslant 0} f_k$ *converge uniformément sur* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$ *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p, q \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)(p < q) \quad \forall x \in \mathrm{A} \textit{ on a } \left| \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x) \right| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration.

$$\forall n \geqslant 0 \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k\geqslant 0} f_{\mathrm{K}} \text{ converge uniformément sur } \mathrm{A} \subseteq \mathrm{E} \right) \\ \Longleftrightarrow \ & \big((s_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge uniformément sur } \mathrm{A} \subset \mathrm{E} \big) \\ \Longleftrightarrow \ & \big((s_n)_{n\geqslant 0} \text{ vérifie le C.U.C. sur } \mathrm{A} \subseteq \mathrm{E} \big) \\ \Longleftrightarrow \ & \begin{pmatrix} \forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p, q \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)(p < q), \\ \forall x \in \mathrm{A} \text{ on a } \left| s_p(x) - s_q(x) \right| \leqslant \varepsilon \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left| s_p(x) - s_q(x) \right| = \left| \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x) \right|$$

□

Proposition 28 (Lemme d'Abel pour les séries de fonctions)**.** *Soit* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de fonctions :* $f_n : \mathrm{E} \to \mathbb{K}$. *Soit* $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite décroissante d'applications de* E *dans* $\mathbb{R}_+$ *avec* $\alpha_n : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$. *On suppose :*

1. $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *uniformément sur* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$ *:* $\alpha_n \searrow_0^{\textit{uniformément}}$.
2. $\exists \mathrm{M} > 0 / \forall x \in \mathrm{A}, \forall n \geqslant 0 : \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| \leqslant \mathrm{M}$.

Alors $\sum_{k\geqslant 0} f_k \cdot \alpha_k$ *est convergente uniformément sur* A.

Démonstration. On va vérifier le C.U.C. sur $A \subseteq E$ pour $\sum_{k\geqslant 0} f_k \alpha_k$. Soient $x \in A, p, q \in \mathbb{N}(p < q)$ et $n \geqslant 0$. On cherche à majorer :

$$\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)\alpha_k(x)$$

On sait que :

$$s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$
$$\forall p \geqslant 0 \quad s_{p+1}(x) - s_p(x) = f_{p+1}(x)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=p+1}^{q} \alpha_k(x) f_k(x)\right| &= \left|\alpha_{p+1}(x) f_{p+1}(x) + \alpha_{p+2}(x) f_{p+2}(x) + \cdots + \alpha_q(x) + f_q(x)\right| \\
&= \left|\begin{array}{r}\alpha_{p+1}(x)\left(s_{p+1}(x) - s_p(x)\right) + \alpha_{p+2}(x)\left(s_{p+2}(x) - s_{p+1}(x)\right) \\ + \cdots + \alpha_q(x)\left(s_q(x) - s_{q-1}(x)\right)\end{array}\right| \\
&= \left|\begin{array}{l}-\alpha_{p+1}(x) s_p(x) + \left(\alpha_{p+1}(x) - \alpha_{p+2}(x)\right) s_{p+1}(x) \\ \quad + \cdots + \left(\alpha_{q-1}(x) - \alpha_q(x)\right) s_{q-1}(x) + \alpha_q s_q(x)\end{array}\right| \\
&\leqslant M \left|\begin{array}{r}\alpha_{p+1}(x) + \alpha_{p+1}(x) - \alpha_{p+2}(x) + \alpha_{p+2}(x) - \alpha_{p+3}(x) \\ + \cdots + \alpha_{q-1}(x) - \alpha_{q-1}(x) + \alpha_q(x)\end{array}\right| \\
&\leqslant 2M \left|\alpha_{p+1}(x)\right| \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \text{ uniformément sur } A \subseteq E
\end{aligned}$$

□

Application. Soit $\theta \in]0, 2pi[= E$ fixé. Soient $A = [\theta, 2\pi - \theta] \subset E$ et $g_n : [0, 2\pi - \theta] \to \mathbb{C}$ définie par $x \mapsto g_n(x) = \alpha_n e^{inx}$ où $(\alpha_n)_{n\geqslant 0} \searrow_0$ et $\forall n \geqslant 0, \alpha_n \geqslant 0$, $\alpha_n \in R_+$.

On cherche la nature de $\sum_{n\geqslant 0} g_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n e^{inx}$.

$$f_n(x) = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx = (e^{ix})^n = (\cos x + i \sin x)^n$$

$$\begin{aligned}
\left|s_n(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{inx}\right| &= \left|\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right| \\
&= \left|\frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right| \quad (x \neq 0, x \neq 2\pi) \\
&\leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} = M
\end{aligned}$$

$\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n e^{inx}$ converge uniformément sur $[\theta, 2\pi - \theta]$ avec $\theta \in]0, \pi[$.

En particulier, si $\nu > 0$, les séries suivantes convergent :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{inx}}{n+1} ; \sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{inx}}{(n+1)^\nu} ;$$
$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos nx}{(n+1)^\nu} ; \sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin nx}{(n+1)^\nu}$$

Chapitre III

Séries entières

Définition 17. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle ou complexe. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$, avec pour tout $n \geqslant 0$, $f_n : \mathbb{K} \to \mathbb{C}$ définie par $x \mapsto f_n(x) = a_n x^n$. Alors la série $\sum_{n\$ge0} f_n$ est appelée série entière.

On notera cette série entière :

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

On peut aussi considérer des séries entières du type :

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n (x - x_0)^n \quad (x, x_0 \in \mathbb{K})$$

Exemples.

1. $\sum_{n\geqslant 0} x^n$, ici $a_n = 1$. Si $|x| < 1$ on sait que $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Y-a-t'il convergence uniforme ?
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$, où $x \in \mathbb{K}$; $a_n = \frac{1}{n!}$. En utilisant le critère de d'Alembert : soit $x \in \mathbb{C}$, si $x = 0$ il y a convergence, sinon :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = \ell < 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente.

III.1 Rayon, disque de convergence

Définition 18. Soit $x_0 \in \mathbb{K}$; $r > 0$. On appelle disque ouvert de $\mathbb{K}$ de centre x_0 et de rayon r l'ensemble :

$$\mathrm{D}(x_0, r) = \left\{x \in \mathbb{K} / \left|x - x_0\right| < r\right\}$$

On appelle disque fermé de $\mathbb{K}$ de centre x_0 et de rayon r l'ensemble :

$$\overline{\mathrm{D}(x_0,r)} = \left\{x \in \mathbb{K} / \left|x - x_0\right| \leqslant r\right\}$$

On appelle cercle de centre x_0 et de rayon r l'ensemble :

$$\mathrm{S}(x_0,r) = \left\{x \in \mathbb{K} / \left|x - x_0\right| = r\right\}$$

Proposition 29 (dite d'Abel). *Soit $x_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)_{n\geqslant 0}$ soit bornée. Alors pour tout x dans $\mathbb{C}$ tel que $|x| < \left|x_0\right|$ la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est absolument convergente, donc convergente et normalement convergente dans tout disque fermé $\overline{\mathrm{D}(x_0,r)}$ où $r < \left|x_0\right|$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}\left((a_n x_0^n)_{n\geqslant 0} \text{ bornée dans } \mathbb{C}\right) &\iff \left(\exists \mathrm{M} > 0 / \forall n \geqslant 0, \left|a_n x_0^n\right| \leqslant \mathrm{M}\right)\\ &\iff \left(\exists \mathrm{M} > 0 / \forall n \geqslant 0, \left|a_n\right| \left|x_0\right|^n \leqslant \mathrm{M}\right)\end{aligned}$$

$$\forall n \geqslant 0, \left|a_n x^n\right| = \left|a_n \left(\frac{x_0}{x_0}\right)^n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant \mathrm{M}\left(\frac{|x|}{\left|x_0\right|}\right)^n$$

Or $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{|x|}{\left|x_0\right|}\right)^n$ converge si $|x| < \left|x_0\right|$, donc le critère de comparaisons des séries donne : $\sum_{n\geqslant 0}\left|a_n x^n\right|$ converge si $|x| < \left|x_0\right|$.

Soit $r > 0, r < \left|x_0\right|$. On se place sur le disque, $\forall x \in \overline{\mathrm{D}(0,r)}, |x| \leqslant r < \left|x_0\right|$, on a :

$$\forall x \geqslant 0 \quad \left|a_n x^n\right| \leqslant \mathrm{M}\left(\frac{|x|}{\left|x_0\right|}\right)^n \leqslant \left(\frac{r}{\left|x_0\right|}\right)^n$$

$\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{r}{\left|x_0\right|}\right)^n$ est convergente car $r < \left|x_0\right|$. Donc pour $x \in \overline{\mathrm{D}(0,r)}$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement. □

Définition 19. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Soit A l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ ($\mathrm{A} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathrm{A}$) tels que la série $\sum_{n\geqslant 0}\left|a_n\right| r^n$ converge. On pose :

$$\mathrm{R} = \begin{cases}\sup \mathrm{A} & \text{si A est majoré}\\ +\infty & \text{sinon}\end{cases}$$

Alors R est appelé rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

$$\mathrm{D}(0,\mathrm{R}) = \{x \in \mathbb{K} / |x| < \mathrm{R}\} \quad \text{si R est fini}$$
$$\mathrm{D}(0,+\infty) = \mathbb{K} \quad \text{si } \mathrm{R} = +\infty$$

est appelé disque ouvert de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

Théorème 8 (caractérisation de R)**.** *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *une série entière (réelle ou complexe) de rayon de convergence* R*. Alors on a :*

1. $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *est absolument convergente pour* $|x| < \mathrm{R}$.
2. $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *diverge pour* $|x| > \mathrm{R}$ *(car* R *est fini).*
3. $\forall r \in [0, \mathrm{R}[$*, la série* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *converge normalement sur* $\mathrm{D}(0, r)$.

Démonstration. Soit $\mathrm{R} \in]0, +\infty]$ (si $\mathrm{R} = 0$, trivial). Soit $r \in [0, \mathrm{R}[$, $0 \leqslant r < \mathrm{R}$. Il existe $r_0 > 0$ tel que $r < r_0 < \mathrm{R}$. Par définition de R, la série $\sum_{n\geqslant 0} \left|a_n\right| r_0^n$ est convergente car $r_0 < \mathrm{R}$, donc $\left|a_n\right| r_0^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d'où la suite $(a_n r_0^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée. On applique la proposition d'Abel : $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement sur $\overline{\mathrm{D}(0, r)}$, d'où 3 et 1.

Prouvons 2. On suppose que $\mathrm{R} \in [0, +\infty[$. Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| > \mathrm{R}$. Supposons la suite $(\left|a_n x^n\right|)_{n\geqslant 0}$ bornée. Soit r tel que $\mathrm{R} < r < |x|$. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} \left|a_n\right| r^n$ converge, car $\left|a_n\right| r^n = \left|a_n x^n\right| \frac{r^n}{|x^n|}$. Ce qui est absurde par définition de R, donc $(a_n x^n)_{n\geqslant 0}$ ne peut pas être bornée d'où la divergence de la série. □

Remarque. Si $|x| = \mathrm{R}$, la conclusion n'est pas immédiate.

Corollaire 2. *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *une série entière sur* $\mathbb{K}$ *de rayon de convergence* R *(éventuellement égal à* $+\infty$*). Alors :*

1. *Si pour tout* $x \in \mathbb{K}$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *converge, alors* $\mathrm{R} = +\infty$.
2. *S'il existe* $\lambda \in]0, +\infty[$ *tel que* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *converge pour* $|x| < \lambda$*, alors* $\mathrm{R} \geqslant \lambda$.
3. *S'il existe* $\mu \in]0, +\infty[$ *tel que* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *diverge pour* $|x| > \mu$*, alors* $\mathrm{R} \leqslant \mu$.

Démonstration.

1. Pour $x = 0$, il y a convergence. Soit $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge. La suite $\left(a_n x^n\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée (car $a_n x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$), donc $\left(\left|a_n x^n\right| = \left|a_n\right| |x^n|\right)_{n\geqslant 0}$ l'est aussi. On a convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \left|a_n\right| r^n$ pour tout r tel que $r < |x|$. Comme x est quelconque dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,
$$\mathrm{A} = \left\{ r \geqslant 0 / \sum_{n\geqslant 0} \left|a_n\right| r^n \text{ converge} \right\}$$
n'est pas majoré, donc $\mathrm{R} = +\infty$.
2. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$ tel que $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < \lambda$. Soit $r_1 < \lambda$. On a $\sum_{n\geqslant 0} a_n r_1^n$ converge par hypothèse, donc $\left(a_n r_1^n\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée et Abel donne :
$$\sum_{n\geqslant 0} \left|a_n\right| r^n \text{ converge} \quad \forall r < r_1$$

Donc $\mathrm{R} \geqslant \lambda$.

3. Même raisonnement.

□

Corollaire 3. 1. *S'il existe $x_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n\geqslant 0} a_n x_0^n$ converge, alors $\mathrm{R} \geqslant \left|x_0\right|$.*

2. *S'il existe $x_1 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n\geqslant 0} a_n x_1^n$ diverge, alors $\mathrm{R} \leqslant \left|x_1\right|$.*

Démonstration. 1. Si $x_0 = 0$ alors $\mathrm{R} \geqslant 0$. Si $x_0 \neq 0$ alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < \left|x_0\right|$. En effet, $\forall x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < \left|x_0\right|$ on a :

$$\begin{aligned}
\left|a_n x^n\right| &= \left|a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}\right| \\
&= \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \\
&\leqslant \mathrm{M} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \\
&= \mathrm{M} \left(\frac{|x|}{\left|x_0\right|}\right)^n
\end{aligned}$$

D'où $\sum_{n\geqslant 0} \left|a_n x^n\right|$ converge. On applique alors le corollaire 1 avec $\lambda = \left|x_0\right|$: $\mathrm{R} \geqslant \lambda = \left|x_0\right|$.

2. Utiliser le corollaire 1 avec $\mu = \left|x_1\right|$.

□

Exemples. 1. Trouver le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} x^n$. $\forall x \in \mathbb{C}, |x| < 1 = \lambda$ on a $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge, d'où $\mathrm{R} \geqslant \lambda = 1$. Si $x_1 = 1$, $\sum_{n\geqslant 0} 1^n$ diverge, d'où $\mathrm{R} \leqslant 1$. Donc $\mathrm{R} = 1$.

2. Soit la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$. $\forall x \in \mathbb{C}$, on sait que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge, donc $\mathrm{R} = +\infty$. D'où $\forall \mathrm{R}_0 > 0$, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge normalement sur $\overline{\mathrm{D}(0, \mathrm{R}_0)}$.

3. Soit $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{x}$, ici $a_n = \frac{1}{n}$. Pour $x_0 = -1$ la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (série alternée), donc $\mathrm{R} \geqslant \left|x_0\right| = 1$. Pour $x_1 = 1$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\mathrm{R} \leqslant \left|x_1\right| = 1$. Donc $\mathrm{R} = 1$.

Proposition 30 (Calcul explicite de R). *Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence* R. *Alors :*

1. *Si tous les* a_n *sont non nuls et si* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathrm{L} \in [0,+\infty]$*, alors* $\mathrm{R} = \frac{1}{\mathrm{L}} \in [0,+\infty]$ *(de d'Alembert).*
2. *Si* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{L} \in [0,+\infty]$*, alors* $\mathrm{R} = \frac{1}{\mathrm{L}} \in [0,+\infty]$ *(Cauchy).*

Également vrai avec $\mathrm{L} = \limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *ou* $\mathrm{L} = \limsup\sqrt[n]{|a_n|}$.

Démonstration.

1. Supposons que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathrm{L}$ avec $\mathrm{L} \neq 0$. Si $x = 0$ il y a convergence. Si $x \neq 0$ le critère de d'Alembert donne :

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{L}\,|x|$$

   D'où si $\mathrm{L}\,|x| < 1$ la série est absolument convergente et donc $\mathrm{R} \geqslant \frac{1}{\mathrm{L}}$ (corollaire 1).
   Si $\mathrm{L}\,|x| > 1$ la série est divergente et donc $\mathrm{R} \leqslant \frac{1}{\mathrm{L}}$ (corollaire 1). Finalement $\mathrm{R} = \frac{1}{\mathrm{L}}$.

2. Si $\mathrm{L} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ et donc pour $x \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)|x| = 0 < 1$$

   D'où la convergence absolue de la série pour tout $x \in \mathbb{K}$. Donc $\mathrm{R} = +\infty$.

3. $\mathrm{L} = +\infty$, si $x \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = +\infty$$

   Donc divergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ (et de $\sum_{n\geqslant 0}|a_n x^n|$). Donc :

$$\left\{ r \geqslant 0 / \sum_{n\geqslant 0}|a_n|\, r^n \text{ converge}\right\} = \{0\} = \mathrm{A}$$

   $\sup(\mathrm{A}) = 0 = \mathrm{R}$. D'où $\mathrm{R} = 0$.

4. Idem pour le calcul de R avec Cauchy :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{L}$$

   $\mathrm{L} \in [0,+\infty]$.

5. En conclusion :
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathrm{L} \Rightarrow \mathrm{R} = \frac{1}{\mathrm{L}}$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathrm{L} \Rightarrow \mathrm{R} = \frac{1}{\mathrm{L}}$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{L} \Rightarrow \mathrm{R} = \frac{1}{\mathrm{L}}$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \mathrm{L} \Rightarrow \mathrm{R} = \frac{1}{\mathrm{L}}$$
$\mathrm{L} \in [0,+\infty]$. Ce sont les formules d'Hadamard.

□

III.2 Opérations sur les séries entières

III.2.1 Somme de deux séries entières

Proposition 31. *Soient* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_1 *et* R_2*. Alors le rayon* R *de convergence de la série* $\sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n)x^n$ *vérifie :*

1. $\mathrm{R} \geqslant \inf(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$*, et* $\mathrm{R} = \inf(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ *si* $\mathrm{R}_1 \neq \mathrm{R}_2$.
2. $\forall x \in \mathbb{K}$ *avec* $|x| < \inf(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ *on a :*
$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Démonstration. 1. Si $x \in \mathbb{K}$ tel que $|x| < \inf(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ il y a convergence pour les deux séries, d'où $\mathrm{R} \geqslant \inf(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ (corollaire 1).
Supposons $\mathrm{R}_1 \neq \mathrm{R}_2$. On suppose $\mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2$. Il y a deux cas : soit $\mathrm{R}_1 < \mathrm{R} < \mathrm{R}_2$ soit $\mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2 < \mathrm{R}$.
Supposons $\mathrm{R}_1 < \mathrm{R} < \mathrm{R}_2$. Soit $x \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{R}_1 < |x| < \mathrm{R}_2$. Alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ diverge puisque $|x| > \mathrm{R}_1$. Si $|x| < \mathrm{R}$ la série $\sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n)x^n$ est convergente. Or $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ est convergente puisque $|x| < \mathrm{R}_2$, d'où par soustraction :
$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \sum_{n\geqslant}(a_n + b_n)x^n - \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n \text{ converge}$$
Absurde car $|x| > \mathrm{R}_1$, donc $\mathrm{R} = \mathrm{R}_1 = \inf(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$.
2. Si x est tel que $|x| < \inf(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est convergente et $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ est convergente d'où le résultat.

□

III.2.2 Produit de deux séries entières

Proposition 32. *Soient* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_1 *et* R_2. *La série entière produit :*

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) x^n$$

A pour rayon de convergence R *vérifiant* $R \geqslant \inf(R_1, R_2)$. $\forall x$ *tel que* $|x| < \inf(R_1, R_2)$ *on a :*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) x^n$$

Démonstration. Si $|x| < \inf(R_1, R_2)$ les deux séries sont absolument convergentes d'où le résultat. □

III.2.3 Continuité de la somme d'une série entière

Proposition 33. *Soit* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *une série entière réelle ou complexe de rayon de convergence* R. *Posons* $D = D(0, R) = \{x \in \mathbb{K} / |x| < R\}$. *Notons, pour tout* $x \in D$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Ainsi on a une application* $S : D \to \mathbb{K}$ *définie par* $x \mapsto S(x)$. *Alors* S *est continue sur* D*, le disque ouvert de convergence.*

Démonstration. Soit $x \in D$. Donc $|x| < R$. Soit $r > 0$ tel que $|x| \leqslant r < R$. Ainsi $x \in \overline{D(0, r)}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est uniformément convergente sur $\overline{D(0, r)}$. $u_n : x \mapsto u_n(x) = a_n x^n$ est continue sur $\mathbb{K}$ $\forall n \geqslant 0$. $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $D(0, r)$. Donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est continue en x, d'où la continuité de S sur D. □

III.2.4 Séries entières à variables réelles

On considère $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec comme rayon de convergence $R > 0$ et $x \in]-R, R[\subset \mathbb{R}$, et $a_n \in \mathbb{K}$.

Proposition 34 (Intégration de la somme)**.** *La série entière* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$*, obtenue par intégration terme à terme, a aussi pour rayon de convergence* R *et* $\forall x \in]-R, R[$. *On a :*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_n t^n \, dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Démonstration. On revient à l'intégrabilité d'une série de fonction. $R > 0$, soient $x \in]-R, R[$ et $r > 0$ tel que $R < -r \leqslant x \leqslant r < R$. Soit R' le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$. Posons, pour tout x dans $[-r, r]$, et pour tout $n \geqslant 0$:

$$F_n(x) = \int_0^x a_n t^n \, dt = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[-r, r]$. Donc, grâce au théorème d'intégrabilité des séries de fonctions, la série $\sum_{n\geqslant 0} F_n$ converge uniformément sur $[-r, r]$. De plus, on a, $\forall x \in [-r, r]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n \, dt \right) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Donc $\forall x$ tel que $|x| < R$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ converge. D'où $R' \geqslant R$.

Reste à montrer que $R' = R$, en exercice. □

Proposition 35 (Dérivabilité de la somme)**.** *La série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$, obtenue par dérivation terme à terme, a aussi pour rayon de convergence* R. *Soit* S *la somme de la série entière :* $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Alors* S *est dérivable sur* $]-R, R[$ *et on a :*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

On réitère : S *est indéfiniment dérivable sur* $]-R, R[$, *et de plus on a* $\forall k \in \mathbb{N}$, $S^{(k)}(0) = k! a_k$.

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $x \in [-r, r] \subset]-R, R[$. Sur $[-r, r]$, on applique le théorème de la dérivabilité de la série de fonctions : $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, $u_n(x) = a_n x^n$. D'où $R' \geqslant R$.

Ici aussi, montrer que $R' = R$ est laissé en exercice.

$\forall x \in [-r, r]$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. D'où $S'(0) = a_1 = 1! a_1$. Par récurrence sur k, on obtient que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-(k-1)) a_n x^{n-k}$$

D'où $S^{(k)}(0) = k! a_k$. □

Théorème 9 (d'Abel)**.** *Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ (resp. $x_0 \in \mathbb{R}_-^*$) tel que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x_0^n$ converge. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, x]$ (resp. sur $[x_0, 0]$) et sa somme y est continue.*

Démonstration. Si $|x_0| < \mathrm{R}$, c'est évident. On sait que $\mathrm{R} \geqslant |x_0|$. Il suffit d'examiner la situation $x_0 = \pm\mathrm{R}$. Supposons $x_0 = +\mathrm{R} > 0$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{R}^n$ convergente. D'après le critère de Cauchy, $\sum_{n\geqslant 0} a_n x_0^n$ converge si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}^*/\forall p, q \geqslant \mathrm{N}_0 (q > p)$ on a

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} a_k x_0^k\right| = \left|\underbrace{a_{p+1}x_0^{p+1} + a_{p+2}x_0^{p+2} + \dots + a_q x_0^q}_{\mathrm{A}_{p,q}}\right| \leqslant \varepsilon$$

On veut montrer que le critère uniforme de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est vrai sur $[0, x_0] = [0, \mathrm{R}]$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}^*/\forall p, q \geqslant \mathrm{N}_1 (q > p) \forall x \in [0, x_0]$

alors $\left|\sum_{k=p+1}^{q} a_k x^k\right| = \left|\underbrace{a_{p+1}x^{p+1} + \dots + a_q x^q}_{\Delta_{p,q}}\right| \leqslant \varepsilon.$

$$\begin{aligned} a_{p+1}x_0^{p+1} &= \mathrm{A}_{p,p+1} \\ a_{p+2}x_0^{p+2} &= \left(\mathrm{A}_{p,p+2} - \mathrm{A}_{p,p+1}\right) \\ a_q x_0^q &= \mathrm{A}_{p,q} - \mathrm{A}_{p,q-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\Delta_{p,q}(x)\right| &= \left| a_{p+1}x_0^{p+1}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{p+1} + \dots + a_q x_0^q \left(\frac{x}{x_0}\right)^q \right| \\ &= \left| \begin{array}{l} \mathrm{A}_{p,p+1}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{p+1} + \left(\mathrm{A}_{p,p+2} - \mathrm{A}_{p,p+1}\right)\left(\frac{x}{x_0}\right)^{p+2} \\ + \dots + \left(\mathrm{A}_{p,q} - \mathrm{A}_{p,q-1}\right)\left(\frac{x}{x_0}\right)^q \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{l} \mathrm{A}_{p,p+1}\left(\left(\frac{x}{x_0}\right)^{p+1} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{p+2}\right) \\ + \mathrm{A}_{p,p+2}\left(\left(\frac{x}{x_0}\right)^{p+2} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{p+3}\right) \\ + \dots + \mathrm{A}_{p,q-1}\left(\left(\frac{x}{x_0}\right)^{q-1} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^q\right) + \mathrm{A}_{p,q}\left(\frac{x}{x_0}\right)^q \end{array} \right| \\ &\leqslant \varepsilon\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{p+1} + \dots\right] \leqslant \varepsilon\left(\frac{x}{x_0}\right)^{p+1} \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}_0$. □

Exemple. $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$. Si $x_0=1$, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge, donc $R\geqslant 1$. D'Alembert nous donne $R\leqslant 1$, d'où $R=1$. Alors, sur $]-1,1[=]-R,R[$ la série est convergente. Donc sur $[0,1]$ il y a convergence uniforme, donc la somme de la série y est continue. $\forall x\in[0,1]$, $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ et :

$$\lim_{x\to 1^-} S(x)=S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln(2)$$

III.3 Développements en série entière d'une fonction à variable réelle

Proposition 36. *Soient* $I=]-\alpha,+\alpha[\subset\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$. *Existe-t-il une série entière telle que* $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ *sur* I. *Si oui, est-elle unique ?*

Proposition 37. *Soit* $f:]-\alpha,\alpha[\to\mathbb{R}$. *Si* f *est la somme d'une série entière sur* I*, alors* f *est indéfiniment dérivable et de plus on a*

$$\forall x\in]-\alpha,\alpha[\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Démonstration. Supposons qu'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ telle que

$$\forall x\in]-\alpha,\alpha[\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

Alors le corollaire 1 dit que le rayon de convergence R de la série vérifie $R\geqslant\alpha$. Donc $]-\alpha,\alpha[\subset]-R,R[$.

Par dérivations successives, f est indéfiniment dérivable, et

$$\begin{aligned}\forall x\in]-\alpha,\alpha[\quad f'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\\ &\vdots\\ f^{(k)}(x)&=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))a_nx^{n-k}\\ \forall k\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

D'où $f^{(k)}(0)=k!a_k$, ainsi $a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ □

Définition 20. Soit $f :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable. On appelle série de Mac Laurin de f au voisinage de 0 la série entière

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Intéressons nous maintenant au problème de convergence de la série de Mac Laurin de f.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Étudions sa continuité en 0.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

Maintenant sa dérivabilité en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{0-0}{x} = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x}) e^{-(\frac{1}{x^2})^2} \\ &= \lim_{u\to\infty} u e^{-u^2} = 0 \end{aligned}$$

Donc $f'(0) = 0$. En réitérant, on trouve $f^{(k)}(0) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La série de Mac Laurin (ou de Taylor) au voisinage de 0 est

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

Mais $f(x) \neq 0$ pour x au voisinage de 0, donc f n'est pas dérivable en série entière au voisinage de 0, alors que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

On va alors s'intéresser à la différence

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right|$$

quand n tend vers l'infini, sur le disque de convergence de la série.

Proposition 38. *Soit* $f : \mathrm{I} =]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ *indéfiniment dérivable. On suppose qu'il existe* $\mathrm{M} > 0$ *telle que* $\forall n \geqslant 0$*,* $\forall x \in \mathrm{I}$ *on a* $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \mathrm{M}$*. Alors* $\forall x \in \mathrm{I}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Démonstration. Formule de Taylor avec reste intégral. $\forall x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

que l'on peut montrer par récurrence sur n. $\forall x \in \mathrm{I}$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right|$$

Supposons $x \geqslant 0$.

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \mathrm{M}\, dt = \mathrm{M} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x \leqslant \mathrm{M} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Donc $\forall x \in \mathrm{I}$, la différence est majorée par $\frac{\mathrm{M}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Montrons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

On considère la série $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Le critère de d'Alembert donne sa convergence pour tout $x \in \mathrm{I}$, $x \neq 0$.

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \times \frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = \frac{1}{(n+2)} |x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$$

Donc la série converge, et $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. □

III.4 Quelques fonctions usuelles définies par des séries entières

À ne pas confondre avec les D.L. qui ne sont vrais que localement.

III.4.1 Fonction e^x

$x \in \mathbb{R}$. La série de Taylor de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$ est

$$\sum_{p \geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$$

Comme $f^{(p)}(0) = e^0 = 1$, cette série devient

$$\sum_{p \geqslant 0} \frac{x^p}{p!}$$

Alors,

$$\left| f(x) - \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \right| \leqslant \mathrm{M} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où M majore les dérivées successives de f. Sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$ si $x \leqslant 0$), on a

$$\forall t \in [0, x] \quad \left| f^{(p)}(t) \right| \leqslant e^{|x|} = \mathrm{M}$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\left| e^x - \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p \right| \leqslant e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Donc sur $\mathrm{I} =]-\alpha, \alpha[\subset \mathbb{R}$ on a, $\forall x \in \mathrm{I}$

$$e^{\alpha} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

D'où, $\forall x \in]-\alpha, \alpha[$

$$e^x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{p!}$$

Avec convergence uniforme de la série sur $[-\alpha, \alpha]$.

III.4.2 Fonction e^{-x}

On a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^{-x} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^p}{p!}$$

Avec convergence uniforme de la série sur tout intervalle du type $]-\alpha, \alpha[$.

III.4.3 Fonctions hyperboliques et circulaires

ch = cosh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Par somme des deux fonctions précédentes, on a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

avec convergence uniforme pour tout intervalle $[-\alpha, \alpha]$.

sh = sinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Par différence maintenant, on a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

avec convergence uniforme sur $[-\alpha, \alpha]$.

cos : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$. $f^{(p)}(x) = \cos^{(p)}(x) = \cos(x + p\frac{\pi}{2})$ par récurrence sur p. Donc $f^{(p)}(0) = \cos(p\frac{\pi}{2})$. Si p est impair, $\cos(p\frac{\pi}{2}) = 0$, et $\cos(2p\frac{\pi}{2}) = (-1)^p$. D'où, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)}$$

Ici encore, le rayon de convergence est $+\infty$.

sin : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, par récurrence sur p on a $\sin^{(p)}(x) = \sin(x + p\frac{\pi}{2})$. On a, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

III.4.4 Fonction $(1 + x)^\alpha$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, on obtient un polynôme, qui est déjà une série entière.

Supposons donc $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1 - x)^\alpha$.

$$f^{(p)}(x); f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}; f'(0) = \alpha$$

Donc, $\forall x \in]-1, 1[$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(p-1))}{p!} x^p$$

III.4.5 Fonctions $\frac{1}{1+x}$ et $\frac{1}{1-x}$

$\forall x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

On peut indéfiniment intégrer (ou dériver) terme à terme ces deux séries. En intégrant la première, on trouve $\forall x \in]-1,+1[$

$$\ln(1+x)\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

En prenant $x = 0$ on trouve que $\Lambda = 0$. Donc, $\forall x \in]-1,1[$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p} \end{aligned}$$

Sur $[0,1] = [0,\mathrm{R}]$ on peut appliquer Abel, il y a donc convergence uniforme sur $[0,1]$. Par continuité de la somme sur $[0,1]$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} (\ln(1+x)) &= \lim_{x\to 1^-} \left(\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p} \right) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \ln(2) \end{aligned}$$

III.4.6 Exponentielle complexe

La série $\sum_{p\geqslant 0} \frac{z^p}{p!}$ pour $z \in \mathbb{C}$ est absolument convergente, car $\forall z \neq 0$

$$\frac{|z|^{p+1}}{(p+1)!} \times \frac{p!}{|z|^p} = \frac{|z|}{(p+1)} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 < 1$$

Posons $\mathrm{S}(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^p}{p!}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Proposition 39. *$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $\forall u, v \in \mathbb{C}$:*

1. *L'application $z \mapsto e^z$ est continue sur $\mathbb{C}$.*
2. $e^{u+v} = e^u e^v$
3. $e^z \neq 0$
4. $e^{iy} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(iy)^p}{p!} = \cos y + i \sin y$
5. $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ *on a* $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$
6. $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} = e^x$
7. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{e^z} = e^{\overline{z}} = e^{x-iy} = e^x e^{-iy} = e^x(\cos y - i \sin y)$

Démonstration. $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

1. $z \mapsto e^z$ est continue sur $\mathbb{C}$.
   Critère de d'Alembert : $z \neq 0$,
   $$\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right| \left|\frac{n!}{z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
   donc $\mathrm{R} = +\infty$; la série est absolument convergente sur $\mathbb{C}$, donc convergente sur $\mathbb{C}$. Soit $r_0 > 0$ fixé quelconque. Sur le disque fermé $\overline{\mathrm{D}(0, r_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r_0\}$ la série converge uniformément ; $\overline{\mathrm{D}(0, r_0)} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$ est continue. D'où la continuité sur $\mathbb{C}$.
2. $\forall u, v \in \mathbb{C}$, $e^u e^v = e^{u+v}$
   $$e^u = \sum_{p=0}^{\infty} \underbrace{\frac{u^p}{p!}}_{a_p} \;; e^v = \sum_{p=0}^{\infty} \underbrace{\frac{v^p}{p!}}_{b_p}$$
   Le produit des deux séries donne une série absolument convergente, car les deux séries sont absolument convergentes, et c'est la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$

où

$$\begin{aligned}
w_n &= \sum_{i+j=n} a_i b_J \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{u^{n-i}}{(n-i)!} \frac{v^i}{i!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{(n-i)!i!}}_{\binom{i}{n}} u^{n-i} v^i \\
&= \frac{1}{n!}(u+v)^n
\end{aligned}$$

donc

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{u^p}{p!}\right)\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{v^p}{p!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u+v)^n}{n!} = e^{u+v}$$

3. $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$

   Si $z = 0$, $e^0 = 1$. D'où, $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{-z} e^z = 1$, donc $e^z \neq 0$ et $e^{-z} \neq 0$. En conséquence, si $x \in \mathbb{R}$, $e^x e^{-x} = 1$ et $e^x \neq 0$, mais également e^x et e^{-x} sont de même signe pour tout x de $\mathbb{R}$. Comme $e^0 = 1 > 0$, on en déduit $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos y + i \sin y
\end{aligned}$$

5. $z = x + iy$, $e^z = e^{x+iy}$, $e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

6. $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}|e^z| = \left|e^{x+iy}\right| &= \left|e^x(\cos y + i \sin y)\right| \\ &= |e^x| \left|\cos y + i \sin y\right| \\ &= e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} \\ &= e^x = e^{\operatorname{Re} z}\end{aligned}$$

□

Remarque. $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}e^{iy} &= \cos y + i \sin y \\ e^{-iy} &= \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y\end{aligned}$$

D'où, $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = -i\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2} \\ \sin y &= \frac{i}{2}(e^{-iy} - e^{iy})\end{aligned}$$

Ce sont les formules d'Euler.

III.4.7 Fonctions $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\cos z$, $\sin z$

Dans le cas réel, on a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

On pose donc $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!}$$

Pour le sinus, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

On pose $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\sin z = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

De même, on a $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{ch} z = \cosh z = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p}}{(2p+1)!}$$
$$\operatorname{sh} z = \sinh z = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

En conséquence, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = e^z$$
$$\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = e^{-z}$$
$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$
$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\operatorname{ch}(iz) = \cos z$$
$$\frac{1}{i} \operatorname{sh}(iz) = \sin z$$

D'où $\forall \in \mathbb{C}$

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}$$
$$\cos z - i \sin z = e^{-iz}$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$\forall z, z' \in \mathbb{C}$ on a

$$\operatorname{ch}(z + z') = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z' + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z'$$
$$\sin(z + z') = \cos z \sin z' + \cos z' \sin z$$

III.4.8 Approximation de e

$$e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots$$

e est une somme infinie de rationnels. On voit facilement que $e > 2$. Posons

$$e = \left(1 + \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \mathrm{R}_n$$

avec $\mathrm{R}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Majorons ce reste :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)(n+3)} + \dots \\
&< \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{(n+1)^2} + \dots \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^3 + \dots\right) \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} \\
&< \frac{1}{n!n}
\end{aligned}$$

Pour avoir e à ε près, il faut prendre n tel que

$$\frac{1}{n!n} < \varepsilon$$

Proposition 40. *e est irrationnel.*

Démonstration. $0 < \mathrm{R}_n < \frac{1}{n!n} < 1$. R_n est donc de la forme $\frac{\theta}{n!n}$ avec $0 < \theta < 1$. D'où

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n}$$

Supposons e rationnel. Il existe n assez grand tel que $(n!n)e$ soit entier. Or

$$(n!n)e = n!n\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \theta$$

θ n'est pas entier, absurde. □