Cours d’analyse de J.-P. Troallic

FMdKdD
fmdkdd [à] free.fr

Université du Havre
Année 2007–2008

Table des matières

Chapitre I

Intégrales et primitives

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Limite simple et uniforme d'une suite de fonction

1.0.1 Définitions. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de J dans $\mathbb{K}$, et soit $f : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$.

1. On dit que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers f dans* J si, pour tout $x \in \mathrm{J}$, la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ vers $f(x)$.

   Si la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, on dit que f est *limite simple* de la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On dit que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers f dans* J si :

   $$\sup_{x\in\mathrm{J}}\left|f(x)-f_n(x)\right| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

   Il est équivalent de dire que :

   $$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \left(n\in\mathbb{N} \text{ et } n\geqslant n_0\right) \Longrightarrow \left(\forall x\in\mathrm{J} : \left|f(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon\right)$$

   Si la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, on dit que f est *limite uniforme* de la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Remarque. La suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au plus une limite simple.

En effet, supposons que $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f et vers $g : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$; soit $x \in \mathrm{J}$, alors $\lim f_n(x) = f(x)$ et $\lim f_n(x) = g(x)$; l'unicité dans $\mathbb{K}$ de la limite d'une suite implique $f(x) = g(x)$.

1.0.2 Proposition. *Avec les notations de 1.0.1, si la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. En particulier, si la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite uniforme, elle est unique.*

Démonstration. Immédiate. □

Remarque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n : [0,1[\mapsto \mathbb{R}$ l'application définie par $g_n(x) = x^n$, et soit $g : [0,1[\mapsto \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 0$ [1]. La suite $\left(g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g, car si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $\lim x^n = 0$. Par contre, la suite $\left(g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément. En effet, si $\left(g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admettait une limite uniforme, ce serait nécessairement g. Or, on a :

$$\sup_{x\in[0,1[} \left|g(x) - g_n(x)\right| = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1$$

et la suite réelle constante 1 ne tend évidemment pas vers 0.

1.0.3 Propositions. *Soit* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Soit* $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'applications de* J *dans* $\mathbb{K}$ *convergeant uniformément vers une application* $f : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$. *Soit* $\left(g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'applications de* J *dans* $\mathbb{K}$ *convergeant uniformément vers une application* $g : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$. *Alors :*

1. $\left(f_n + g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $f + g$ *dans* J.
2. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\left(\lambda f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* λf.
3. $\left(\left|f_n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $\left|f\right|$.

Démonstrations.

$$\begin{array}{lrl} f+g \text{ est définie par} & (f+g)(x) = f(x) + g(x) & (x \in \mathrm{J}) \\ \lambda f \text{ est définie par} & (\lambda f)(x) = \lambda f(x) & (x \in \mathrm{J}) \\ \left|f\right| \text{ est définie par} & \left|f\right|(x) = \left|f(x)\right| & (x \in \mathrm{J}) \end{array}$$

1. Soit $\varepsilon > 0$. Soient $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\left(n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0\right) \Longrightarrow \left(\forall x \in \mathrm{J} : \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$\left(n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_1\right) \Longrightarrow \left(\forall x \in \mathrm{J} : \left|g_n(x) - g(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Soit $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Alors :

$$\left(n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_2\right) \Longrightarrow \left(\forall x \in \mathrm{J} : \left|(f_n + g_n)(x) - (f+g)(x)\right| \leqslant \varepsilon\right)$$

[1] Couramment appelée application nulle.

En effet, soit $n \geqslant n_2$ et soit $x \in \mathrm{J}$. On a :

$$\begin{aligned}\left|(f_n+g_n)(x)-(f+g)(x)\right| &= \left|f_n(x)-f(x)+g_n(x)-g(x)\right| \\ &\leqslant \left|f_n(x)-f(x)\right|+\left|g_n(x)-g(x)\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

Points 2 et 3 laissés en exercice.

□

1.1 Applications en escalier

1.1.1 Définitions. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$.

1. On appelle *subdivision* de $[a,b]$ toute suite finie croissante $(x_0,\dots,x_n)$ de réels dans $[a,b]$ telle que $x_0=a$ et $x_n=b$.
2. Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$. On dit que f est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision $(x_0,x_1,\dots,x_n)$ de $[a,b]$ telle que f prenne une valeur constante c_i sur $]x_i,x_{i+1}[$ pour $i=0,\dots,n-1$. Les valeurs en x_i ne correspondent à aucune condition. Notons qu'une telle subdivision n'est pas déterminée de manière unique par f.
3. Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ une fonction en escalier. Une subdivision $(x_0,\dots,x_n)$ de $[a,b]$ sera dite *adaptée* à f si f est constante sur $]x_i,x_{i+1}[$ pour i de 0 à $n-1$.

Remarques. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

1. Soient f et g deux applications en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$, $(x_0,\dots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f et soit $(y_0,\dots,y_p)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à g. Alors, en « entremêlant » les ensembles $\{x_i/0 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\{y_i/0 \leqslant i \leqslant p\}$, on obtient une subdivision de $[a,b]$ qui est adaptée à la fois à f et à g. On en déduit que $f+g$ et fg sont des fonctions en escalier sur $[a,b]$.
2. Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ une application. Alors :
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si f est une fonction en escalier, il est immédiat que λf et $|f|$ sont des fonctions en escalier.
   (b) Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, f est une fonction en escalier si et seulement si c'est le cas pour sa partie réelle et sa partie imaginaire.

1.1.2 Proposition. *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ une application continue. Alors il existe au moins une suite d'applications en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f dans $[a,b]$.*

Démonstration. Comme f est uniformément continue sur $[a,b]$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \left(x, y \in [a,b] \text{ et } \left|x-y\right| \leqslant \eta\right) \Longrightarrow \left|f(x)-f(y)\right| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ telle que :

$$\left|x_i - x_{i+1}\right| \leqslant \eta \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$$

η étant choisi comme indiqué ci-dessus. Soit φ l'application de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ définie par $\varphi(x) = f(x_i)$ pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}[\quad (i = 0, \dots, n-1)$ et par $\varphi(b) = f(b)$. Il est immédiat que φ est une fonction en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, et que :

$$\left|f(x) - \varphi(x)\right| \leqslant \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$$

Appliquons ce qui précède en prenant successivement :

$$\varepsilon = 1, \varepsilon = \frac{1}{2}, \dots, \varepsilon = \frac{1}{n}, \dots$$

On obtient alors une suite $\left(\varphi_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'applications en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f. Notons que :

$$\left|f(x) - \varphi_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{n} \quad \forall x \in [a,b]$$

□

1.2 Applications continues par morceaux

1.2.1 Définition. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ une application. On dit que f est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que f est continue en tout point de $]x_i, x_{i+1}[$ et si f admet en x_i une limite à gauche et une limite à droite (seulement à droite pour a et seulement à gauche pour b). On dira alors que $(x_0, \dots, x_n)$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à la fonction continue par morceaux f.

1.3 Remarques importantes

Remarques.

1. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ une application. Si f est une application continue ou si f est en escalier, f est continue par morceaux.

2. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soient f et g deux applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ continues par morceaux. Il est immédiat que si $(x_0,\dots,x_n)$ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, et $(y_0,\dots,y_p)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à g, la subdivision de $[a,b]$ obtenue en « entremêlant » les ensembles $\{x_i/0 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\{y_i/0 \leqslant i \leqslant p\}$ est adaptée à la fois à f et à g. On en déduit que $f+g$ et fg sont des applications continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.
3. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ une application. Alors :
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si f est continue par morceaux dans $[a,b]$, λf et $|f|$ le sont aussi.
   (b) Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, f est une fonction continue par morceaux si et seulement si c'est le cas pour sa partie réelle et pour sa partie imaginaire.

1.3.1 Proposition. *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ une application continue par morceaux. Alors il existe au moins une suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f dans $[a,b]$.*

Démonstration. Admis ; exercice éventuel. □

2 Intégrale des fonctions en escalier

2.0.1 Définition. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ une fonction en escalier. Soit $(x_0,x_1,\dots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. On appelle *intégrale* de f l'élément suivant de $\mathbb{K}$:

$$c_0(x_1-x_0)+c_1(x_2-x_1)+\cdots+c_{n-1}(x_n-x_{n-1})$$

où c_k est la valeur constante de f sur $]x_k,x_{k+1}[$. Notons que $c_k = f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$ pour $k=0,1,\dots,n-1$. Ce nombre est noté :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

et se lit « intégrale de f sur $[a,b]$ » ou encore « intégrale de a à b de $f(x)dx$ ».
L'intégrale de f ne dépend que de f, et non pas de la subdivision introduite pour la définir. En effet, soit $(y_0,y_1,\dots,y_p)$ une autre subdivision de $[a,b]$ adaptée à f ; notons $(z_0,z_1,\dots,z_q)$ la subdivision de $[a,b]$ adaptée à f obtenue en « entremêlant » les ensembles $\{x_i/0 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\{y_i/0 \leqslant i \leqslant p\}$. Il est facile

de voir que l'on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\cdot\left(x_{k+1}-x_k\right) &= \sum_{k=0}^{q-1} f\left(\frac{z_k+z_{k+1}}{2}\right)\cdot\left(z_{k+1}-z_k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{y_k+y_{k+1}}{2}\right)\cdot\left(y_{k+1}-y_k\right)\end{aligned}$$

2.0.2 Propositions. *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soient f et g des applications en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. Alors :*

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.*
2. *On a $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.*
3. *On a $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right|\,dx$.*
4. *Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et si $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.*
5. *Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et si f_1 (resp. f_2) est la partie réelle (resp. imaginaire) de f, on a $f=f_1+if_2$, alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + i\int_a^b f_2(x)dx$.*

Démonstrations.

1. Immédiat.
2. Soit $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ qui est adaptée à la fois à f et à g. On a :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}(f+g)\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\cdot(x_{i+1}-x_i)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\cdot(x_{i+1}-x_i)\\ &\quad+\sum_{i=0}^{n-1} g\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\cdot(x_{i+1}-x_i)\\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

3. Soit $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f ; rappelons

que $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est adaptée aussi à la fonction en escalier $|f|$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot (x_{i+1} - x_i)\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right| \cdot (x_{i+1} - x_i) \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left|f\right| \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \\
&\leqslant \int_a^b \left|f\right|(x)dx
\end{aligned}$$

4. Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fois à f et à g. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} g\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \\
&\leqslant \int_a^b g(x)dx
\end{aligned}$$

5. Conséquence de 1 et 2.

□

3 Intégrale des fonctions continues par morceaux

3.0.1 Lemme. *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{K}$ continue par morceaux. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f dans $[a, b]$ (voir 1.3.1). Alors, la suite $\left(\int_a^b g_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ converge dans $\mathbb{K}$ vers une limite ℓ. De plus ℓ ne dépend que de f et non pas de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui a été choisie.*

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geqslant n_0) \Longrightarrow \left(\forall x \in [a, b], \left|g_n(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)$$

D'après 2.0.2, si $p \geqslant n_0$ et si $q \geqslant n_0$, on a :

$$\begin{aligned}\left|g_p(x) - g_q(x)\right| &= \left|g_p(x) - f(x) + f(x) - g_q(x)\right| \quad (x \in [a,b]) \\ &\leqslant \left|g_p(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - g_q(x)\right| \quad (x \in [a,b]) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{b-a}\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g_p(x)dx - \int_a^b g_q(x)dx\right| &= \left|\int_a^b \left(g_p(x) - g_q(x)\right) dx\right| \\ &\leqslant \int_a^b \left|g_p(x) - g_q(x)\right| dx\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\left|\int_a^b g_p(x)dx - \int_a^b g_q(x)dx\right| \leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \frac{\varepsilon}{b-a}b - a = \varepsilon$$

On voit ainsi que $\left(\int_a^b g_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Elle converge donc dans $\mathbb{K}$.

2. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite d'applications en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f dans $[a,b]$. Il est immédiat que la suite :
$$(g_0, h_0, g_1, h_1, g_2, h_2, \ldots, g_n, h_n, \ldots)$$
est une suite d'applications en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f. Par application du 1, la suite :
$$\left(\int_a^b g_0(x)dx, \int_a^b h_0(x)dx, \ldots, \int_a^b g_n(x)dx, \int_a^b h_n(x)dx, \ldots\right)$$
d'éléments de $\mathbb{K}$ admet dans $\mathbb{K}$ une limite m. Comme toute sous-suite de cette dernière suite converge vers m, c'est en particulier le cas des deux sous-suites $\left(\int_a^b g_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\int_a^b h_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

3.0.2 Définition. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ continue par morceaux. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f dans $[a,b]$, qui existe d'après 1.3.1.

Alors la limite dans $\mathbb{K}$ de la suite $\left(\int_a^b g_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée l'intégrale de f et est notée $\int_a^b f(x)dx$. Cette définition ne dépend que de f non pas de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie.

Remarque. Les définitions 2.0.1 et 3.0.2 sont bien sûr compatibles entre elles. En effet, si $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ est une fonction en escalier, la suite $(f, f, \dots, f, \dots)$ est une suite d'applications en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f.

3.0.3 Propositions. *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soient f et g des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ continues par morceaux. Alors :*

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :*
$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$
2. *On a :*
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
3. *On a :*
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b \left|f\right|(x)dx$$
En particulier, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.
4. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors :*
$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$
5. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si f_1 (resp. f_2) est la partie réelle (resp. imaginaire) de f, on a :*
$$\int_a^b f(x)dx = \left(\int_a^b f_1(x)dx\right) + i\left(\int_a^b f_2(x)dx\right)$$

Démonstrations. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f dans $[a,b]$, et soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers g dans $[a,b]$.

1. Compte tenu de 1.0.3 et 2.0.2, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f)(x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\lambda f_n)(x)dx \\ &= \lim_{n\to+\infty} \lambda \int_a^b f_n(x)dx \\ &= \lambda \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx \\ &= \lambda \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

   En utilisant la suite de fonctions en escalier $\left(\lambda f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers λf dans $[a,b]$ pour introduire $\int_a^b (\lambda f)(x)dx$.

2. Compte tenu de 1.0.3 et 2.0.2, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (f_n+g_n)(x)dx \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx + \int_a^b g_n(x)dx\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx + \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

3. Compte tenu de 1.0.3 et 2.0.2, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &= \left|\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx\right| \\ &= \lim_n \left|\int_a^b f_n(x)\,dx\right| \\ &\leqslant \lim_n \int_a^b \left|f_n\right|(x)\,dx \\ &\leqslant \int_a^b \left|f\right|(x)\,dx\end{aligned}$$

□

3.0.4 Proposition. *Soit* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ *une application continue par morceaux. Alors :*

1. *Si* $\left|f(x)\right| \leqslant \mathrm{M}$ *pour tout* $x \in [a,b]$*, on a :*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et si* $m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$*, on a :*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

Démonstration. Conséquence des 3 et 4 de 3.0.3. □

3.0.5 Proposition. *Soit* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *une application continue. Alors il existe* $c \in [a,b]$ *tel que :*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

Démonstration. On a $f([a,b]) = [\alpha,\beta]$. D'après le 2 de 3.0.4 on a :

$$\alpha \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \beta$$

Comme $f([a,b]) = [\alpha,\beta]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

□

Remarque. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Si une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ est nulle sauf en un nombre fini de points, c'est une fonction en escalier et son intégrale est nulle. On en déduit que si f et g sont deux applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$ continues par morceaux qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

3.0.6 Proposition. *Soit* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ *une application continue par morceaux. Soit* $c \in [a,b]$. *Alors la restriction de* f *à* $[a,c]$ *(resp. de* f *à* $[c,b]$*) est continue par morceaux, et l'on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f_{[a,c]}(x)\,dx + \int_b^c f_{[b,c]}(x)\,dx$$

En pratique on écrit :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Démonstration. Exercice. □

3.0.7 Définition. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ continue par morceaux avec $a \leqslant b$. On pose :

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

On vérifie facilement que pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$, on a :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$$

4 Primitives

4.0.1 Définition. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$ une application. On appelle *primitive* de f toute application $\mathrm{F} : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$ dérivable et telle que

$$\mathrm{F}' = f$$

4.0.2 Propositions. *Soit* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$. *Supposons que* f *possède une primitive* F. *Alors :*

1. *Les primitives de* f *sont les applications de* J *dans* $\mathbb{K}$ *de la forme* $\mathrm{F} + \lambda$ *où* λ *est une constante prise dans* $\mathbb{K}$.
2. *Soit* $x_0 \in \mathrm{J}$ *et soit* $y_0 \in \mathbb{K}$. *Alors il existe une et une seule primitive de* f *prenant la valeur* y_0 *en* x_0.

Démonstrations.

1. On a $(F+\lambda)' = F' = f$ donc $F+\lambda$ est une primitive de f. Inversement, si G est une primitive de f, on a $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$ donc $G - F = \lambda$ où λ est une constante dans $\mathbb{K}$. On a donc $G = F + \lambda$.
2. Conséquence de 1.

□

Remarque. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : J \mapsto \mathbb{C}$. Soit f_1 (resp. f_2) la partie réelle (resp. imaginaire) de f. Alors f admet une primitive si et seulement si f_1 et f_2 admettent des primitives. Si f_1 (resp. f_2) admet F_1 (resp. F_2) comme primitive, alors f admet $F_1 + iF_2$ comme primitive.

4.0.3 Théorème. *Soit* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : J \mapsto \mathbb{K}$ *continue. Soit* $a \in J$. *Alors l'application* $F : J \mapsto \mathbb{K}$ *définie par :*

$$\forall x \in J \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est la primitive de f *nulle en* a.

Démonstration. Soit $x_0 \in J$. D'après 3.0.5 et 3.0.7, on a pour tout $x \in J \setminus \{x_0\}$:

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt &= \int_a^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^a f(t)\,dt \\ &= \int_{x_0}^x f(t)\,dt \\ &= (x - x_0)\,f(c_x) \end{aligned}$$

où c_x est un nombre compris entre x et x_0. On a donc :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(c_x)$$

Quand x tend vers x_0 dans $J \setminus \{x_0\}$, c_x tend vers x_0 et comme f est continue en x_0, $f(c_x)$ tend vers $f(x_0)$. Ainsi, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. On a bien sûr $F(a) = 0$. □

Remarque. La notion d'intégrale a permis d'établir l'existence de primitives pour les fonctions numériques continues définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans la pratique, on a des méthodes directes pour calculer les primitives, et c'est à partir de ces primitives que l'on calcule les intégrales au moyen de la proposition suivante.

4.0.4 Proposition. *Soit* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$ *continue. Soit* $\mathrm{F} : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$ *une primitive de* f. *Alors pour tous* $a, b \in \mathrm{J}$, *on a :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Démonstration. Soit $\mathrm{G} : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$ définie par :

$$\mathrm{G}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

D'après 4.0.3, G est la primitive de f nulle en a. L'application de J dans $\mathbb{K}$ qui à x associe $\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)$ est également la primitive de f nulle en a. On a donc :

$$\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)$$

En donnant à x la valeur b on obtient que :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

□

Remarques.

1. Notations de 4.0.4. $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ est parfois noté $[\mathrm{F}(x)]_a^b$.
2. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{K}$ une application continue par morceaux. Pour calculer $\int_a^b f(t)\,dt$, on choisit une subdivision de $[a, b]$, $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$, adaptée à f. On a alors :

   $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,dt$$

   Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ on considère $g_i : [x_i, x_{i+1}] \mapsto \mathbb{K}$ définie par :

   $$\begin{aligned} &g_i(t) = f(t) \quad \text{si} \quad x_i < t < x_{i+1} \\ &g_i(x_i) = f(x_i^+) \quad \text{et} \quad g_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}^-) \end{aligned}$$

   L'application $g_i : [x_i, x_{i+1}] \mapsto \mathbb{K}$ est continue. On calcule $\int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(t)\,dt$ en s'appuyant sur 4.0.4. On obtient $\int_a^b f(t)\,dt$ en utilisant le fait que :

   $$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt = \int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(t)\,dt$$

   pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

4.1 Notations et définitions

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$ continue. Pour tout $a \in \mathrm{J}$, l'application de J dans $\mathbb{K}$ qui à x associe $\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f. Pour cette raison, on désigne souvent par :

$$\int f(t)\,dt$$

une primitive quelconque de f (la classe des primitives de f). Une primitive de f s'appelle aussi une intégrale indéfinie. Par opposition, si $a, b \in \mathrm{J}$, alors le nombre $\int_a^b f(t)\,dt$ est appelé une intégrale définie.

4.1.1 Propositions. *Soit* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Soient* f *et* g *des applications continues de* J *dans* $\mathbb{K}$ *et soit* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Alors :*

1. *On a :* $\int \big(f+g\big)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
2. *On a :* $\int \big(\lambda f\big)(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$

Démonstration. C'est une conséquence de règles de dérivation. □

5 Intégration par parties

5.0.1 Propositions. *Soit* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Soient* f *et* g *deux applications continûment dérivables de* J *dans* $\mathbb{K}$ *; c.-à-d.* f *et* g *dérivables et* f' *et* g' *continues. Alors :*

1. *On a sur* J *:*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \tag{1}$$

2. *Pour tous* $a, b \in \mathrm{J}$*, on a :*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \tag{2}$$

Démonstration.

1. On a $(fg)' = f'g + fg'$, donc :

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

2. Conséquence du 1 et de 4.0.4.

□

Remarques. $f(b)g(b) - f(a)g(a)$ peut se noter $\left[f(x)g(x)\right]_a^b$.
Les formules (1) et (2) sont appelées formules d'intégration par parties.

Exemple. Calculer $\int \ln x \, dx$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Posons $f'(x) = 1$ et $g(x) = \ln x$. On a $f(x) = x$ et $g'(x) = \ln x$. Donc :

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - x + \lambda\end{aligned}$$

où λ est une constante dans $\mathbb{R}_+^*$.

6 Changement de variable

6.0.1 Proposition. *Soit* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$ *continue. Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et soit* $\varphi : \mathrm{I} \mapsto \mathrm{J}$ *continûment dérivable. Alors :*

1. *On a :*

$$\left(\int f(x) \, dx\right) \circ \varphi = \int (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) \, dt$$

Signalons que $\varphi'(t) \, dt$ *se note souvent* $d\varphi(t)$.

2. *Pour tous* $a, b \in \mathrm{I}$ *on a :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) \, dt$$

Démonstration.

1. On a :

$$\begin{aligned}\left(\left(\int f(x) \, dx\right) \circ \varphi\right)' &= \left(\left(\int f(x) \, dx\right)' \circ \varphi\right) \times \varphi' \\ &= (f \circ \varphi) \, \varphi'\end{aligned}$$

On a donc :

$$\left(\int f(x) \, dx\right) \circ \varphi = \int (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) \, dt$$

2. Conséquence du 1 et de 4.0.4.

□

Remarque. Les formules données en 6.0.1 sont appelées formules de changement de variable.

Exemple. Calculer $F(x) = \int \sqrt{1-x^2}\,dx$.
Posons $x = \sin t$ avec $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. On a $dx = \cos t\,dt$ et :

$$\begin{aligned} F(\sin t) &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt \\ &= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \\ &= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + \lambda \end{aligned}$$

On a donc :

$$F(x) = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \lambda$$

7 Fonction logarithmique

7.0.1 Définition. L'application de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\frac{1}{x}$ est continue. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, le logarithme (népérien) de x, noté $\ln x$ est défini par :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

La fonction logarithmique ln est donc la primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ nulle en 1.

7.0.2 Proposition. *Pour tous $x, y \in]0,+\infty[$, on a :*

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Démonstration. Soit $y \in]0,+\infty[$ et soit $\varphi :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \ln(xy) \quad \text{pour tout } x \in]0,+\infty[$$

On a $\varphi'(x) = \frac{1}{xy} \times y = \frac{1}{x}$. On a donc $\varphi(x) = \ln x + \lambda$ car φ et $\ln x$ sont des primitives de $\frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$. En donnant à x la valeur 1 on voit que $\lambda = \ln y$ et par conséquent $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. □

7.0.3 Corollaire.

1. *Pour tout* $x \in]0, +\infty[$ *on a :*

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

2. *Pour tous* $x, y \in]0, +\infty[$ *on a :*

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

3. *Pour tout* $x \in]0, +\infty[$ *et tout* $n \in \mathbb{Z}$ *on a :*

$$\ln x^n = n \ln x$$

7.1 Propriétés de la fonction ln

La fonction logarithmique vérifie les propriétés suivantes :

1. On a $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ donc $\ln x$ est strictement croissante.
2. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln 2^n = \lim\limits_{n \to +\infty} n \ln 2 = +\infty$ car $\ln 2 > 0$.
3. On a $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$, donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$.
4. On a $(\ln x)'' = -\dfrac{1}{x^2}$ donc $\ln x$ est une fonction concave. Autrement dit :

$$\ln\left(\alpha x + (1-\alpha) y\right) \geqslant \alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y$$

5. La tangente au graphe de $\ln x$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$. Comme $\ln x$ est concave, on a :

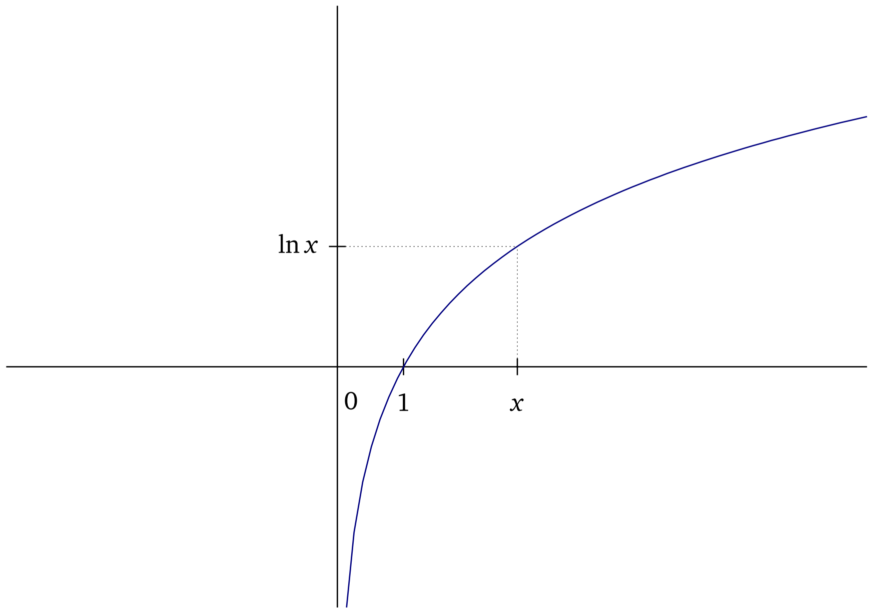
$$\ln x \leqslant x - 1 \quad \text{pour tout } x \in]0, +\infty[$$

   On a donc :

$$\ln x = 2 \ln \sqrt{x} \leqslant 2\left(\sqrt{x} - 1\right) \leqslant 2\sqrt{x}$$

   On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
6. Il existe un et un seul réel positif, noté e, tel que $\ln e = 1$. On peut montrer que $e = 2,71828\ldots$

7. Graphique de $\ln x$:



7.2 Logarithme de base a

7.2.1 Définition. Soit $a \in]0, +\infty[$ avec $a \neq 1$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

On dit que $\log_a x$ est le logarithme à base a de x et que $x \mapsto \log_a x$ est la fonction logarithmique de base a. Notons que $\log_e = \ln$. Les propriétés 7.0.2 et 7.0.3 restent vraies pour $\log_a$.

8 Fonction exponentielle

8.0.1 Définition. L'application $f : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln x$ est continue, strictement croissante, et $f\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}$. L'application $f^{-1} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ réciproque de f est donc continue, strictement croissante et $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$. Cette application f^{-1}, notée exp, est appelée la fonction exponentielle. On peut la voir comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'image est $\mathbb{R}_+^*$.

8.1 Changement de notation

Notation. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp n = e^n$ car $\ln \exp n = n$ et $\ln e^n = n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp x$ sera noté e^x.

8.1.1 Propositions. *On a :*

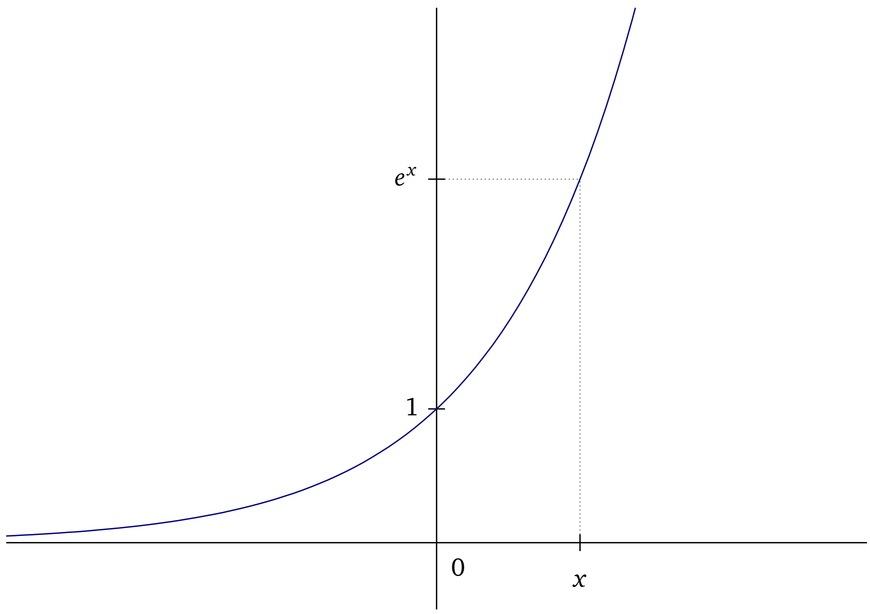
1. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ *et* $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
3. *Soient* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $y \in \mathbb{R}$. *On a* $y = \ln x$ *si et seulement si* $x = e^y$. *On a* $e^{\ln x} = x$ *et* $\ln(e^y) = y$.
4. $(e^x)' = e^x$.
5. $x \mapsto e^x$ *est convexe.*

Démonstrations.

1. Découle des 2 et 3 de 7.1.
2. Découle du 5 de 7.1.
3. Vérifié par définition de l'exponentielle.
4. On a $\ln e^x = x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Par dérivation $\frac{1}{e^x}(e^x)' = 1$ et donc $(e^x)' = e^x$.
5. On a $(e^x)'' = e^x \geqslant 0$.

□

8.2 Graphique de $x \mapsto e^x$



8.3 Exponentielle de base a

8.3.1 Définition. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $a^x = e^{x \ln a}$.

Remarque. Si $x \in \mathbb{Z}$, ou si $a = e$, on retrouve les notions connues. Par exemple, on a $a^3 = e^{3 \ln a} = e^{\ln a \times a \times a} = a \times a \times a$.

8.3.2 Propositions. *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :*

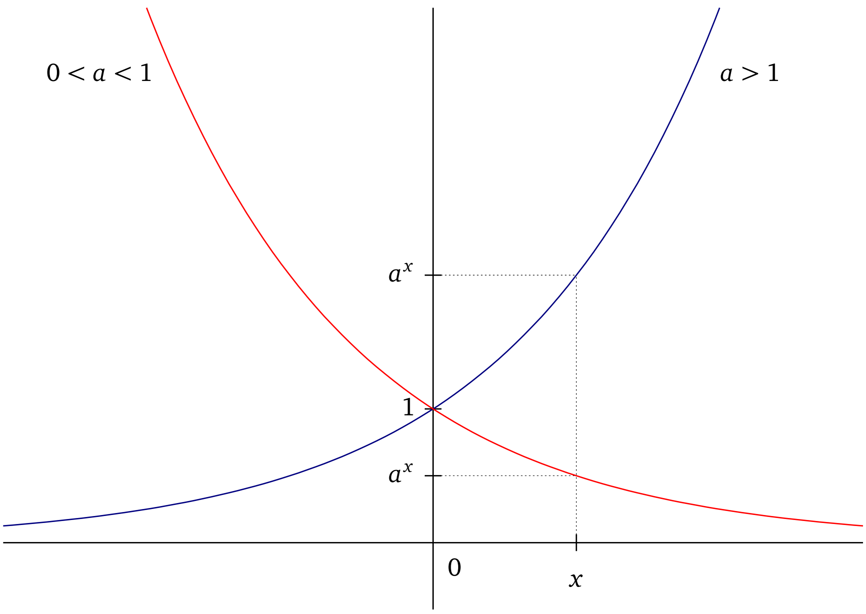
1. $\ln(a^x) = x \ln a$
2. $a^x a^y = a^{x+y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$
5. $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
6. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
7. $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \quad (n, m \in \mathbb{N}^*)$
8. $1^x = 1$ *et* $a^0 = 1$

Démonstrations. Exercice. □

8.3.3 Proposition. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors on a $(a^x)' = a^x \ln a$.*

Démonstration. En effet $(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \times \ln a = a^x \ln a$. □

8.4 Graphique de $x \mapsto a^x$



9 Fonctions puissances x^α

9.0.1 Définition. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ est appelée une *fonction puissance*.

9.0.2 Propositions. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Alors :*

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. *On a donc :*

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &\geqslant 0 \quad \textit{si } \alpha \geqslant 0 \\ (x^\alpha)' &\leqslant 0 \quad \textit{si } \alpha \leqslant 0 \end{aligned}$$

2. *Si* $\alpha \neq 1$ *on a :*

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda$$

Démonstrations.

1. $(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} \times \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \times \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$
2. Trivial.

□

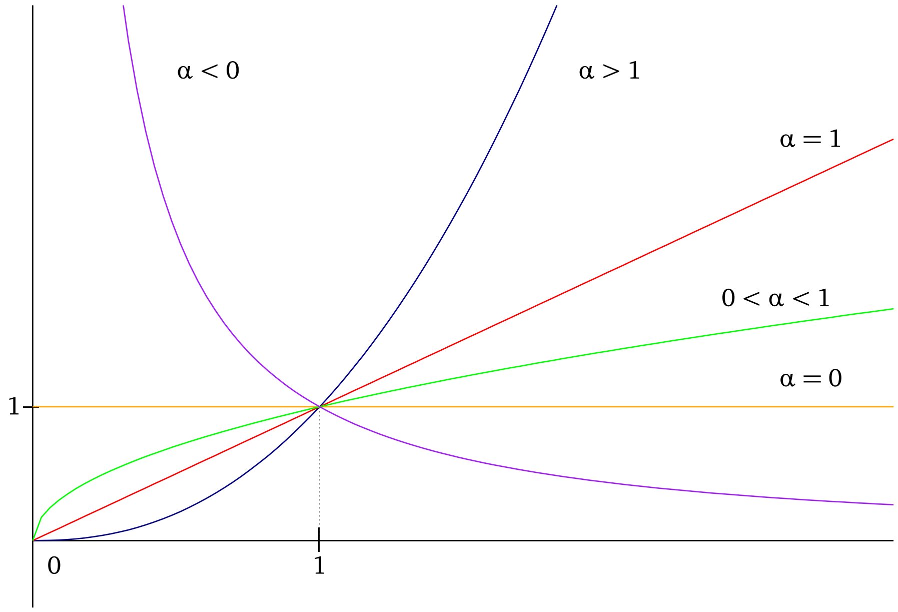
Remarques. On a :

1.

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

2. $(x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ donc $x \mapsto x^\alpha$ est convexe si $\alpha \leqslant 0$ ou si $\alpha \geqslant 1$ et concave si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

10 Graphique de $x \mapsto x^\alpha$



11 Fonctions hyperboliques

11.0.1 Définitions. Les fonctions sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique et tangente hyperbolique sont les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par les formules :

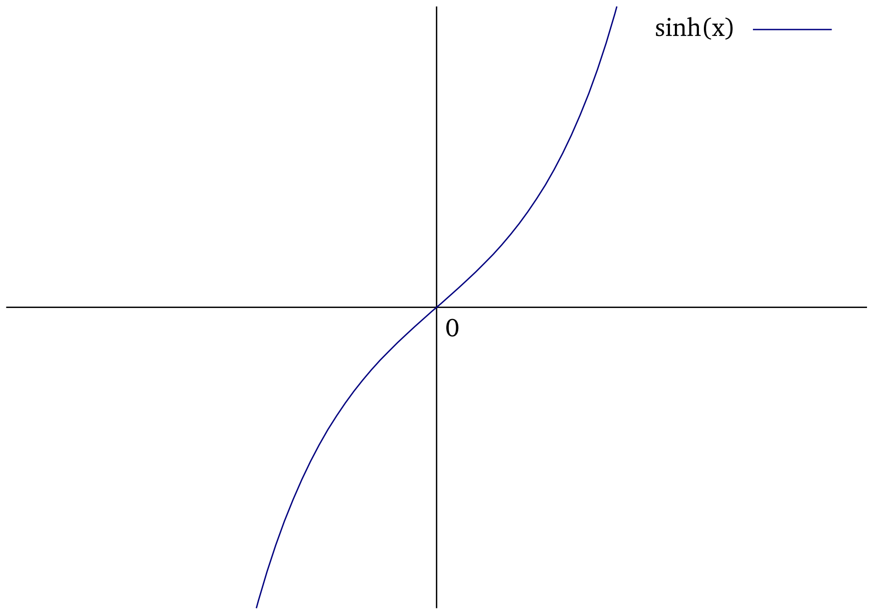
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

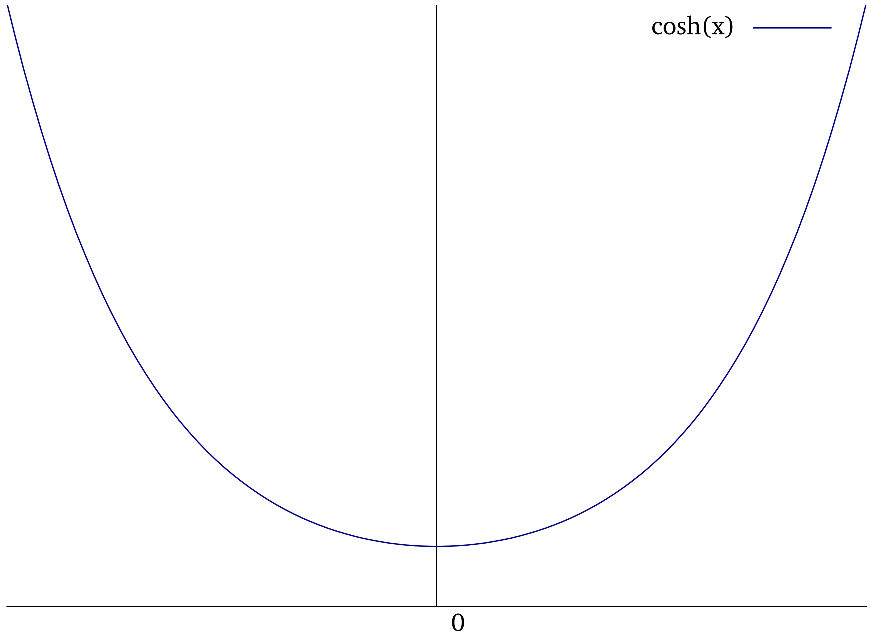
11.0.2 Propositions. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :*

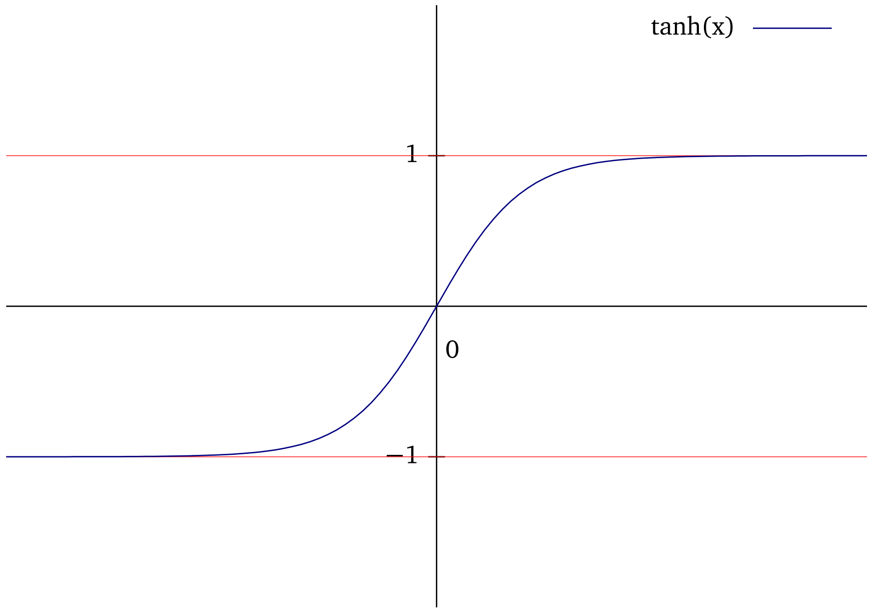
1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. $(\sinh x)' = \cosh x$
3. $(\cosh x)' = \sinh x$
4. $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
5. $\cosh(-x) = \cosh x$
6. $\sinh(-x) = -\sinh x$
7. $\tanh(-x) = -\tanh x$
8. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$
9. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

Démonstration. Exercice. □

11.1 Graphiques







12 Fonctions réciproques des fonctions hyperboliques

12.0.1 Définitions.

1. L'application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sinh x$ est continue, strictement croissante et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. L'application $f^{-1} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ réciproque de f est donc continue, strictement croissante et $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Cette application f^{-1} est notée Argsinh.
2. L'application $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cosh x$ est continue, strictement croissante et $g\left(\mathbb{R}_+\right) = [1, +\infty[$. L'application réciproque $g^{-1} : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ de g est donc continue, strictement croissante et
$$g^{-1}([1, +\infty[) = [0, +\infty[$$
L'application g^{-1} est notée Argcosh.
3. L'application $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \tanh x$ est continue, strictement croissante et $h(\mathbb{R}) =]-1, 1[$. L'application $h^{-1} :]-1, 1[\mapsto \mathbb{R}$ réciproque de h est donc continue, strictement croissante et $h^{-1}(]-1, 1[) = \mathbb{R}$. L'application h^{-1} est notée Argtanh.

12.0.2 Propositions. *On a :*

1. $\left(\operatorname{Argsinh} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

2. $\operatorname{Argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
3. $\left(\operatorname{Argcosh} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
4. $\operatorname{Argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$
5. $\left(\operatorname{Argtanh} x\right)' = \frac{1}{1-x^2}$
6. $\operatorname{Argtanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

13 Ordre de croissance

13.0.1 Proposition. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. *Alors :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

On dit que les puissances l'emportent sur les logarithmes.

Démonstration. On a :

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$$

Quand $x \to +\infty$, alors $x^\alpha \to +\infty$ donc $\frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha} \to 0$. On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$. □

13.0.2 Proposition. *Soit a un réel tel que $a > 1$. Alors :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$$

On dit que les exponentielles l'emportent sur les puissances.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}\ln \frac{x^\alpha}{a^x} &= \ln x^\alpha - \ln a^x = \alpha \ln x - x \ln a \\ &= x\left(\alpha \frac{\ln x}{x} - \ln a\right)\end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha\frac{\ln x}{x} = 0$ et $\ln a > 0$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{x^\alpha}{a^x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$. □

13.0.3 Proposition. *Soit un réel* $\alpha < 0$. *Alors :*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

Démonstration. Posons $y = \frac{1}{x}$. On a :

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = -\frac{\ln y}{y^{-\alpha}}$$

Donc :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln x}{x^\alpha} = -\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y^{-\alpha}} = 0$$

$\square$

13.0.4 Proposition. *Soit un réel $a > 1$. Alors :*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^{-x}}{x^\alpha} = 0$$

Démonstration. On a :

$$\frac{a^{-x}}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha}}{a^x}$$

donc d'après 13.0.2, $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^{-x}}{x^\alpha} = 0$. $\square$

14 Calcul de primitives

14.1 Primitives usuelles

On a :

1. $\displaystyle\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \lambda \quad \text{si } \alpha \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \lambda$
3. $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + \lambda$
4. $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + \lambda$
5. $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + \lambda$
6. $\displaystyle\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + \lambda \quad \text{si } a \neq 1$

7. $\displaystyle\int \sinh x\, dx = \cosh x + \lambda$

8. $\displaystyle\int \cosh x\, dx = \sinh x + \lambda$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} x + \lambda$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arctan} x + \lambda$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Argsinh} x + \lambda = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \lambda$

Remarque. Dans 14.1, λ est une constante. Notons que :

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln x + \lambda & \text{sur }]0,+\infty[\\ \ln(-x)+\lambda & \text{sur }]-\infty,0[\end{cases}$$

Ce qui se résume par :

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \lambda$$

14.1.1 Proposition. *On a :*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\lambda = \operatorname{Argcosh} x + \lambda & \textit{sur }]1,+\infty[\\ \ln\left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)+\lambda & \textit{sur }]-\infty,-1[\end{cases}$$

On écrit brièvement :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + \lambda$$

14.1.2 Proposition. *On a :*

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1+x}{1-x}\right)+\lambda & \textit{sur }]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\lambda = \operatorname{Argtanh} x + \lambda & \textit{sur }]-1,1[\end{cases}$$

On écrit brièvement :

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \lambda$$

14.2 Primitives des fractions rationnelles à coefficients complexes

14.2.1 Proposition. *Soit un entier $n > 1$ et soit $a \in \mathbb{C}$. On a $a = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \lambda$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{2}\ln\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right) + i\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x-\alpha}{\beta} + \lambda$

Démonstration. Exercice. □

14.2.2 Proposition. *Soient g et h deux fonctions polynômes de la variable réelle x et à coefficients dans $\mathbb{C}$. On suppose que h n'est pas la fonction nulle. On a :*

$$h(x) = \lambda\,(x-u)^k \ldots (x-v)^\ell$$

où $u, \ldots, v$ sont les racines de h dans $\mathbb{C}$ deux à deux distinctes et où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit $f = \frac{g}{h}$, on dit que f est une fraction rationnelle de variables réelle à coefficients complexes. Alors il existe une et une seule décomposition :

$$\begin{aligned} f = q &+ \frac{\lambda_k}{(x-u)^k} + \frac{\lambda_{k-1}}{(x-u)^{k-1}} + \cdots + \frac{\lambda_1}{x-u} \\ &+ \cdots \\ &\ \vdots \\ &+ \frac{\mu_\ell}{(x-v)^\ell} + \frac{\mu_{\ell-1}}{(x-v)^{\ell-1}} + \cdots + \frac{\mu_1}{x-v} \end{aligned} \tag{1}$$

où q est une fonction polynôme de la variable réelle x à coefficients dans $\mathbb{C}$ et où $\lambda_k, \ldots, \lambda_1, \ldots, \mu_\ell, \ldots, \mu_1 \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Admis. □

Remarques.

1. Le polynôme q s'obtient en divisant g par h suivant les puissances décroissantes.
2. Pour calculer les $\lambda_k, \ldots, \lambda_1, \ldots, \mu_\ell, \ldots, \mu_1$ on peut multiplier les deux membres de (1) par h ; on obtient ainsi une égalité entre deux polynômes et en égalant les coefficients de ces polynômes on obtient un système d'équations linéaires dont les inconnues sont $\lambda_k, \ldots, \lambda_1, \ldots, \mu_\ell, \ldots, \mu_1$. La résolution de ce système donne $\lambda_k, \ldots, \lambda_1, \ldots, \mu_\ell, \ldots, \mu_1$.

3. Pour calculer λ_k, on multiplie les deux membres de (1) par $(x-u)^k$ puis on donne à x la valeur u.
4. Pour calculer $\lambda_k, \dots, \lambda_1$, on peut faire appel à une division selon les puissances croissantes.

Application. En utilisant 14.2.1, 14.2.2 et 14.2, on peut calculer la primitive de n'importe quelle fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$.

14.3 Primitives de fractions rationnelles à coefficients réels

Soit $f = \frac{g}{h}$ une fraction rationnelle d'une variable réelle x à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour calculer $\int f(x)\,dx$ on peut utiliser 14.2, car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; c'est à dire se placer dans le domaine complexe. On peut aussi rester dans le domaine réel en utilisant la proposition suivante.

14.3.1 Proposition. *Soient g et h des fonctions polynômes de la variable réelle x et à coefficients dans $\mathbb{R}$. On suppose que h n'est pas la fonction nulle. On a :*

$$h(x) = \lambda\,(x-r)^k \dots (x-s)^\ell \left(x^2+ax+b\right)^m \dots \left(x^2+cx+d\right)^n$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$; $r, \dots, s \in \mathbb{R}$ sont deux à deux différents ; $a, b, \dots, c, d \in \mathbb{R}$; $x^2+ax+b, \dots, x^2+cx+d$ sont deux à deux distincts et n'ont pas de racines dans $\mathbb{R}$.

Soit $f = \frac{g}{h}$, on dit que f est une fraction rationnelle de la variable réelle x à coefficients dans $\mathbb{R}$. Alors, il existe une et une seule décomposition :

$$\begin{aligned} f = q &+ \frac{\lambda_k}{(x-r)^k} + \frac{\lambda_{k-1}}{(x-r)^{k-1}} + \dots + \frac{\lambda_1}{x-r} \\ &+ \cdots \\ &\vdots \\ &+ \frac{\mu_\ell}{(x-s)^\ell} + \frac{\mu_{\ell-1}}{(x-s)^{\ell-1}} + \dots + \frac{\mu_1}{x-s} \\ &+ \frac{\nu_m x + \rho_m}{\left(x^2+ax+b\right)^m} + \frac{\nu_{m-1} x + \rho_{m-1}}{\left(x^2+ax+b\right)^{m-1}} + \dots + \frac{\nu_1 x + \rho_1}{x^2+ax+b} \\ &+ \cdots \\ &\vdots \\ &+ \frac{\sigma_n x + \zeta_n}{\left(x^2+cx+d\right)^n} + \frac{\sigma_{n-1} x + \zeta_{n-1}}{\left(x^2+cx+d\right)^{n-1}} + \dots + \frac{\sigma_1 x + \zeta_1}{x^2+cx+d} \end{aligned} \tag{2}$$

Démonstration. Admis. □

Remarques. Notations de 14.3.1.

1. On obtient q en divisant g par h suivant les puissances décroissantes.
2. Pour calculer les $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \rho_i, \dots, \sigma_i$ et ζ_i, on peut multiplier les deux membres de (2) par h ; on obtient une égalité entre deux polynômes et en égalant les coefficients de ces polynômes on obtient un système d'équations linéaires que l'on résout.
3. Pour calculer λ_k on peut multiplier les deux membres de (2) par $(x-r)^k$ puis donner à x la valeur r.
4. Pour calculer $\lambda_k, \dots, \lambda_1$ on peut utiliser une division suivant les puissances croissantes.
5. On peut aussi obtenir (2) en appliquant 14.2.2. En effet, si u est une racine dans $\mathbb{C}$ qui n'est pas dans $\mathbb{R}$, on trouvera dans (1) deux termes de la forme $\frac{\lambda}{(x-u)^i}$ et $\frac{\overline{\lambda}}{(x-\overline{u})^i}$; termes que l'on additionnera. Si r est une racine réelle de h, on trouvera dans (1) un terme de la forme $\frac{\mu}{(x-r)^i}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Application. En utilisant 14.3.1, on peut calculer la primitive de n'importe quelle fraction rationnelle d'une variable réelle à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour cela, précisons comment l'on calcule :

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}\,dx$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, et x^2+cx+d est sans racines dans $\mathbb{R}$. On a $x^2+cx+d = (x-p)^2+q^2$ avec $p, q \in \mathbb{R}$ et $q \neq 0$. Le changement de variable $x-p = qt$ permet de se ramener au calcul de :

$$\int \frac{a't+b'}{(t^2+1)^n}\,dt$$

donc au calcul de :

$$\mathrm{I}_n = \int \frac{t}{(t^2+1)^n}\,dt \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$$

a) Calcul de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)^n}\,dt$. Posons $t^2+1 = u$. On a $2t\,dt = du$. Donc :

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^n}$$

Si $n = 1$:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_n &= \frac{1}{2}\ln|u| + \lambda \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + \lambda \end{aligned}$$

Si $n \geqslant 2$:

$$\mathrm{I}_n = -\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)\left(t^2+1\right)^{n-1}} + \lambda$$

b) Calcul de $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^n}$. On procède par récurrence sur n. Posons $u' = 1$ et $v = \dfrac{1}{\left(t^2+1\right)^n}$. On a $u = t$ et $v' = -n\dfrac{2t}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_n &= \frac{t}{\left(t^2+1\right)^n} + 2n\int \frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}\,dt \\ &= \frac{t}{\left(t^2+1\right)^n} + 2n\int \left(\frac{t^2+1}{\left(t^2+1\right)^{n+1}} - \frac{1}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}\right)dt \\ &= \frac{t}{\left(t^2+1\right)^n} + 2n\left(\mathrm{J}_n - \mathrm{J}_{n+1}\right) \end{aligned}$$

On a par conséquent :

$$2n\mathrm{J}_{n+1} = \frac{t}{\left(t^2+1\right)^n} + (2n-1)\,\mathrm{J}_n$$

14.4 Autres exemples

Exemples.

1. Soit $\mathrm{I} = \int f\left(e^x\right)dx$ où f est une fraction rationnelle d'une variable réelle à coefficients dans $\mathbb{K}$. On a :

$$\mathrm{I} = \int \frac{f\left(e^x\right)}{e^x}e^x\,dx$$

Posons $e^x = t$, on a $e^x dx = dt$ et donc :

$$\mathrm{I} = \int \frac{f(t)}{t}\,dt$$

2. Soit f une fraction rationnelle de deux variables réelles et à coefficients dans $\mathbb{K}$ (par exemple $\frac{3u+5v^2+2uv}{1+u+v}$). Pour calculer $\int f(\cos x, \sin x)$, on se ramène au calcul d'une primitive de fraction rationnelle d'une variable réelle en posant $\tan \frac{x}{2} = t$ (c.-à-d. $x = 2\,\mathrm{Arctan}\, t$). Posons $x \mapsto f(\cos x, \sin x) = \mathrm{F}(x)$. On peut aussi :
   – poser $\cos x = t$ quand $\mathrm{F}(x)$ est impaire.
   – poser $\sin x = t$ quand $\mathrm{F}(x)$ est telle que $\mathrm{F}(\pi - x) = -\mathrm{F}(x)$.
   – poser $\tan x = t$ quand $\mathrm{F}(x)$ est telle que $\mathrm{F}(x+\pi) = \mathrm{F}(x)$.
3. Soit $\mathrm{I} = \int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ où f est une fraction rationnelle de deux variables réelles et à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 2$. Pour calculer I, on pose $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$.
4. Soit $\mathrm{I} = \int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ où f est une fraction rationnelle de deux variables réelles à coefficients dans $\mathbb{K}$, et où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Pour calculer I, on se ramène tout d'abord à un radical de la forme $\sqrt{x^2+1}$, $\sqrt{x^2-1}$ ou $\sqrt{1-x^2}$ (suivant a, b, c). On pose ensuite respectivement $x = \sinh t$, $x = \cosh t$ ou $x = \cos t$.

15 Formule de Taylor avec reste intégrale

15.0.1 Théorème. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \mapsto \mathbb{K}$ admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre n. Alors on a :*

$$
\begin{aligned}
f(b) = f(a) + \frac{b-1}{1!} f'(a) + \frac{(b-1)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b-1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \\
+ \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Démonstration. La propriété est vraie pour $n = 1$ (voir 4.0.4). Supposons la propriété vraie jusqu'à n ; montrons qu'elle est vraie pour $n+1$.

Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{K}$ ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n+1$. Comme f a des dérivées continues jusqu'à l'ordre n, la formule (1) est satisfaite. Une intégration par parties donne :

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt &= \left[-\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \\
&= \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt
\end{aligned}
$$

Il suffit d'effectuer le remplacement dans (1) de l'intégrale par ce qui vient d'être trouvé. □

Chapitre II

Intégrales généralisées

1 Intégrales sur des intervalles non bornés

Dans tout 1, f est une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$ (a est un réel fixé) dont la restriction à $[a, b]$ est continue par morceaux pour tout $b \in [a, +\infty[$. Ces hypothèses sont bien sûr vérifiées si f est continue.

1.0.1 Définition. Soit $F : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{K}$ définie par $F(b) = \int_a^b f(x)\, dx$. Alors :

1. Si $\lim\limits_{b \to +\infty} F(b)$ existe dans $\mathbb{K}$, cette limite est notée $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ et est appelée l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$. De plus, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente.
2. Si $\lim\limits_{b \to +\infty} F(b)$ n'existe pas dans $\mathbb{K}$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est divergente.
3. Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ soit divergente. Alors, si $\lim\limits_{b \to +\infty} F(x) = \pm\infty$, on dit que la divergence de $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est de première espèce. Sinon on dit que la divergence de l'intégrale est de seconde espèce.

1.0.2 Proposition. *Soit $c \in [a, +\infty[$. Alors :*

1. *$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente si et seulement si $\int_c^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente. Si ces intégrales sont convergentes, alors :*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^{+\infty} f(x)\, dx$$

2. *Supposons que* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Alors* $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ *(resp.* $-\infty$*) si et seulement si* $\lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx = +\infty$ *(resp.* $-\infty$*).*

Démonstration. Pour tout $b \in [c, +\infty[$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

La proposition découle donc des théorèmes sur les limites de fonctions. □

1.0.3 Proposition. *L'intégrale :*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

est convergente si et seulement si le réel α *vérifie* $\alpha > 1$.

Démonstration.

1. Pour tout $b \in [1, +\infty[$, on a $\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b$. On a donc $\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ est donc divergente (divergence de première espèce).
2. Supposons $\alpha \neq 1$. Pour tout $b \in [1, +\infty[$, on a :

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^b = \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}$$

   (a) Si $\alpha < 1$, on a $\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ est donc divergente.

   (b) Si $\alpha > 1$, on a $\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}$ car $\lim_{b\to+\infty} \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = 0$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ est donc convergente ; de plus $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}$.

□

1.0.4 Proposition. *L'intégrale :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{\alpha x}}\,dx$$

est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

Démonstration. Exercice. □

Rappel. Soit $h : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}$ continue par morceaux $(\alpha \leqslant \beta)$. Alors, si $h \geqslant 0$ sur $[\alpha, \beta]$, on a $\int_\alpha^\beta h(x)\,dx \geqslant 0$.

1.0.5 Proposition. *Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $f \geqslant 0$ sur $[a, +\infty[$. Alors :*

1. *L'application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout b associe $\int_a^b f(x)\,dx$ est croissante.*
2. *On a :*

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \sup \left\{ \int_a^b f(x)\,dx / b \in [a, +\infty[\right\}$$

Démonstration.

1. Soient $b_1, b_2 \in [a, +\infty[$ tels que $b_1 \leqslant b_2$. On a :

$$\int_a^{b_1} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{b_1} f(x)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx = \int_a^{b_2} f(x)\,dx$$

2. Voir les propriétés sur les limites de fonctions.

□

1.0.6 Proposition. *Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $g : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ dont la restriction à $[a, b]$ est continue par morceaux pour tout $b \in [a, +\infty[$. Supposons que l'on ait $0 \leqslant g \leqslant f$ sur $[a, +\infty[$ et que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ soit convergente. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ est convergente et l'on a :*

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Démonstration. Pour tout $b \in [a, +\infty[$, on a :

$$\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{(voir 1.0.5)}$$

Il en résulte d'après 1.0.5 que l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge et que :

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \leqslant \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

□

1.0.7 Proposition. *Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $g : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ dont la restriction à $[a, b]$ est continue par morceaux pour tout $b \in [a, +\infty[$. Supposons $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$ sur $[a, +\infty[$ et $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to +\infty$.*
Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ est convergente.

Démonstration. Soit $h : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(x) = h(x)g(x)$ pour tout $x \in [a, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$. Soit $c \in [a, +\infty[$ tel que $h(x) \leqslant 2$ pour tout $x \in [c, +\infty[$. On a $0 \leqslant f(x) \leqslant 2g(x)$ pour $x \in [c, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ converge } &\Longrightarrow \int_c^{+\infty} g(x)\,dx \text{ converge} \\
&\Longrightarrow \int_c^{+\infty} 2g(x)\,dx \text{ converge} \\
&\Longrightarrow \int_c^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge} \\
&\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}
\end{aligned}$$

La réciproque est évidente par symétrie. □

Exemple. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3x^2}{x^4 + 2x + 1}\,dx$ est convergente. En effet :

$$\frac{3x^2}{x^4 + 2x + 1} \sim \frac{3}{x^2} \quad (x \to +\infty)$$

Comme ces fonctions sont positives sur $[1, +\infty[$, et comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est convergente, $\int_1^{+\infty} \frac{3x^2}{x^4+2x+1}\,dx$ est convergente (voir 1.0.3).

1.1 Propriétés algébriques

Soit $g : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{K}$ dont la restriction à $[a, b]$ est continue par morceaux pour tout $b \in [a, +\infty[$. Alors :

1. Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ sont convergentes, l'intégrale $\int_a^{+\infty} (f + g)(x)\,dx$ est convergente et l'on a :

$$\int_a^{+\infty} (f + g)(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente, $\int_a^{+\infty} (\lambda f)(x)\,dx$ est convergente aussi et :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Démonstration. C'est une conséquence des propriétés algébriques concernant les limites de fonctions et de ce que pour tout $b \in [a, +\infty[$, on a :

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

et :

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

□

1.1.1 Lemme. *Soit $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ tel que X contient des réels arbitrairement grands, et soit $f : \mathrm{X} \mapsto \mathbb{K}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathrm{X}}} f(x)$ *existe dans $\mathbb{K}$.*
2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} > 0,\ \big(x, y \in \mathrm{X}, x > \mathrm{A}$ *et* $y > \mathrm{A}\big) \Longrightarrow \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon$. *Cette condition est appelée une condition de Cauchy.*

Démonstration. Admis. □

1.1.2 Proposition (Condition de Cauchy pour les intégrales)**.** *Pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ soit convergente, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{A} > 0, \big(x, y \in [a, +\infty[, x > \mathrm{A} \text{ et } y > \mathrm{A}\big) \Longrightarrow \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

Démonstration. Soit $\mathrm{F} : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{K}$ définie par $\mathrm{F}(b) = \int_a^b f(t)\,dt$. On obtient le résultat en appliquant le lemme 1.1.1 à F et en utilisant le fait que, pour tous $x, y \in [a, +\infty[$, on a :

$$\left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right|$$

□

1.1.3 Définition. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est *absolument* convergente si l'intégrale $\int_a^{+\infty} \left|f(x)\right|\,dx$ est convergente.

1.1.4 Proposition. *Supposons l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *absolument convergente. Alors l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *est convergente. Réciproque fausse.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. D'après 1.1.2 il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que :

$$\big(x, y \in [a, +\infty[, y \geqslant x > \mathrm{A}\big) \Longrightarrow \int_x^y \left|f(t)\right|\,dt < \varepsilon$$

Par conséquent :

$$\big(x, y \in [a, +\infty[, y \geqslant x > \mathrm{A}\big) \Longrightarrow \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ vérifie la condition de Cauchy, donc elle converge. □

1.1.5 Proposition (Règle d'Abel)**.** *Supposons que* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*. Supposons que* f *admette dans* $[a, +\infty[$ *une dérivée continue, que* f *soit décroissante, et que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$*. Soit* $g : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ *continue. Supposons qu'il existe* $\mathrm{A} > 0$ *tel que* $\left|\int_a^x g(t)\,dt\right| \leqslant \mathrm{A}$ *pour tout* $x \in [a, +\infty[$.
Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *est convergente.*

Démonstration. On applique la règle de Cauchy (voir 1.1.2). Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x < y$. Soit $\mathrm{G} : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{G}(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

On a :

$$\int_x^y f(t)g(t)\,dt = f(y)\mathrm{G}(y) - f(x)\mathrm{G}(x) - \int_x^y f'(t)\mathrm{G}(t)\,dt$$

On a bien sûr $f \geqslant 0$ sur $[0, +\infty[$ donc :

$$\left|\int_x^y f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \mathrm{A}f(y) + \mathrm{A}f(x) + \mathrm{A}\int_x^y \left|f'(t)\right|\,dt$$

On a $f' \leqslant 0$ sur $[a, +\infty[$, car f est décroissante, donc :

$$\int_x^y \left|f'(t)\right| dt = -\int_x^y f'(t)\, dt = f(x) - f(y)$$

Par conséquent :

$$\left|\int_x^y f(t)g(t)\, dt\right| \leqslant 2\mathrm{A}f(x)$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc il existe $\mathrm{B} > 0$ avec $\mathrm{B} \geqslant a$ tel que si $u \geqslant \mathrm{B}$, alors :

$$\left|f(u)\right| < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{A}}$$

Il en résulte que si $y > x \geqslant \mathrm{B}$, alors :

$$\left|\int_x^y f(t)g(t)\, dt\right| < \varepsilon$$

Par conséquent et d'après 1.1.2, l'intégrale :

$$\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\, dt$$

est convergente. □

Exemple. Considérons l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Par application du critère d'Abel, on voit facilement que cette intégrale est convergente. On peut montrer qu'elle n'est pas absolument convergente.

Exemple. Montrer que les intégrales, dites de Fresnel :

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$$

sont convergentes. On peut là encore montrer qu'elles ne sont pas absolument convergentes.
Indication : poser $x^2 = t$.

Remarque. Au lieu de considérer un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, on peut considérer un intervalle de la forme $]-\infty, a]$. Les énoncés et les propriétés ci-dessus sont faciles à adapter à ce cas, en faisant tout de même attention au critère d'Abel.

2 Intégrales de fonctions non bornées

Dans tout 2, f désigne une application de $]a,b]$ dans $\mathbb{K}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, dont la restriction à $[c,b]$ est continue par morceaux pour tout $c \in]a,b]$. Ces hypothèses sont en particulier vérifiées si f est continue.

2.0.1 Définitions. Soit $\mathrm{F} :]a,b] \mapsto \mathbb{K}$ l'application définie par :

$$\mathrm{F}(c) = \int_c^b f(x)\,dx$$

Alors :

1. Si $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a}} \mathrm{F}(c)$ existe dans $\mathbb{K}$, cette limite est notée $\int_a^b f(x)\,dx$ et est appelée l'intégrale de a à b de $f(x)dx$. De plus on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente.
2. Si $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a}} \mathrm{F}(c)$ n'existe pas dans $\mathbb{K}$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est divergente. Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ soit divergente. Si $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a}} \mathrm{F}(c) = \pm\infty$ on dit que la divergence est de première espèce ; sinon on dit qu'elle est de seconde espèce.

2.0.2 Proposition. *Soit $d \in]a,b]$. Alors :*

1. *$\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si et seulement si $\int_a^d f(x)\,dx$ est convergente. Si ces intégrales sont convergentes, on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

2. *Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Alors :*

$$\lim_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int_c^b f(x)\,dx = \pm\infty \iff \lim_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int_c^d f(x)\,dx = \pm\infty$$

2.0.3 Proposition. *L'intégrale :*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

est convergente si et seulement si le réel α vérifie $\alpha < 1$.

Démonstration.

1. Supposons $\alpha = 1$. Pour tout $c \in]0,1]$, on a :
$$\int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = -\ln c$$
On a donc $\lim\limits_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$. L'intégrale est donc divergente.
2. Supposons $\alpha \neq 1$. Pour tout $c \in]0,1]$, on a :
$$\begin{aligned}\int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_c^1 \\ &= \frac{1}{-\alpha+1} - \frac{c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\end{aligned}$$
   (a) Si $\alpha > 1$, on a $\lim\limits_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \displaystyle\int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty$ et l'intégrale est divergente.

   (b) Si $\alpha < 1$ alors $\lim\limits_{\substack{c\to 0\\ c>0}} \displaystyle\int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{-\alpha+1}$ et l'intégrale est convergente.

□

Problème. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \ln x\,dx$ est convergente.

2.0.4 Proposition. *Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $g :]a,b] \mapsto \mathbb{R}$ dont la restriction à $[c,b]$ est continue par morceaux pour tout $c \in]a,b]$. Supposons que l'on ait $0 \leqslant g \leqslant f$ sur $]a,b]$ et supposons que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ soit convergente. Alors l'intégrale $\int_a^b g(x)\,dx$ est convergente, et l'on a :*
$$\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx$$

Démonstration. Analogue à celle de 1.0.6. □

2.0.5 Proposition. *Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $g :]a,b] \mapsto \mathbb{R}$ dont la restriction à $[c,b]$ est continue par morceaux pour tout $c \in]a,b]$. Supposons que $f \geqslant 0$ et $g \geqslant 0$ sur $]a,b]$ et que $f(x) \sim g(x)$ $(x \to a)$. Alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_a^b g(x)\,dx$ est convergente.*

Démonstration. Analogue à celle de 1.0.7. □

2.1 Propriétés algébriques

2.1.1 Proposition. *Soit $g :]a, b] \mapsto \mathbb{K}$ dont la restriction à $[c, b]$ est continue par morceaux pour tout $c \in]a, b]$. Alors :*

1. *Si les intégrales $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b g(x)\,dx$ sont convergentes, l'intégrale $\int_a^b (f+g)(x)\,dx$ est convergente et l'on a :*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et si $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente, alors $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx$ est convergente et l'on a :*

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

Démonstration. Analogue à celle de 1.1. □

2.1.2 Proposition (Condition de Cauchy)**.** *Pour que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ soit convergente, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,$$
$$\big(x \in]a, b], y \in]a, b], si\ x - a < \eta, y - a < \eta\big) \Longrightarrow \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| < \varepsilon$$

Notons que l'on peut imposer à x d'être plus petit que y.

Démonstration. Analogue à celle de 1.1.2. □

2.1.3 Proposition. *Supposons que f soit bornée sur $]a, b]$, c'est à dire qu'il existe $A > 0$ tel que $\left|f(x)\right| \leqslant A$ pour tout $x \in]a, b]$. Alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2A}$. Alors si $x, y \in]a, b]$, si $x < y$, $x - a < \eta$ et $y - a < \eta$, on a :

$$\left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leqslant \int_x^y \left|f(t)\right|\,dt \leqslant A(y - x) < \varepsilon$$

D'après 2.1.2, $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente. □

2.1.4 Corollaire. *Si* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ *existe dans* $\mathbb{K}$*, alors* $\int_a^b f(x)\,dx$ *est convergente.*

Démonstration. En effet f est nécessairement bornée. □

2.1.5 Définition. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est absolument convergente si $\int_a^b \left|f(x)\right|\,dx$ est convergente.

2.1.6 Proposition. *Supposons l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dx$ *absolument convergente. Alors l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dx$ *est convergente.*

Démonstration. Analogue à celle de 1.1.4. □

2.1.7 Proposition (Règle d'Abel)**.** *Supposons que* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*. Supposons que* f *admette sur* $]a, b]$ *une dérivée continue, que* f *soit croissante, et que* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = 0$*. Soit* $g :]a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *une application continue. Supposons qu'il existe* $\mathrm{A} > 0$ *tel que* $\left|\int_a^x g(t)\,dt\right| \leqslant \mathrm{A}$ *pour tout* $x \in]a, b]$*. Alors l'intégrale* $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ *est convergente.*

Démonstration. Analogue à celle de 1.1.5. □

Remarque. Au lieu de considérer comme on l'a fait ci-dessus un intervalle de la forme $]a, b]$, on peut considérer un intervalle de la forme $[a, b[$. Les définitions et les propriétés précédentes sont faciles à adapter.

3 Combinaisons des situations précédentes

3.0.1 Définition. Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Soit $f :]a, b[\mapsto \mathbb{K}$ dont la restriction à $[\alpha, \beta]$ est continue par morceaux pour tous $\alpha, \beta \in]a, b[$. Soit $r \in]a, b[$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si $\int_a^r f(x)\,dx$ et $\int_r^b f(x)\,dx$ sont convergentes. Si ces intégrales sont convergentes, l'intégrale de f sur $]a, b[$ est par définition $\int_a^r f(x)\,dx + \int_r^b f(x)\,dx$. On voit facilement que ces définitions sont indépendantes du réel r choisi dans $]a, b[$.

On dira que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est absolument convergente si $\int_a^b \left|f(x)\right|\,dx$ est convergente.

Problème.

1. Soit α un réel strictement positif. Montrer que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$$
est convergente.
2. Montrer que si $\alpha > 1$, alors :
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx = (\alpha - 1) \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-2}\, dx$$

Notation. Pour tout réel $\alpha > 0$, on pose $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$. D'après le 2 ci-dessus, on a $\Gamma(\alpha) - (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ pour tout réel $\alpha > 0$. On en déduit que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Chapitre III

Équations différentielles

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.0.1 Définition. On appelle *équation différentielle d'ordre n* toute équation de la forme :

$$f\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{$\mathscr{E}$}$$

On appelle *équation différentielle d'ordre n résolue en $y^{(n)}$* toute équation de la forme :

$$y^{(n)} = g\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \tag{$\mathscr{E}'$}$$

La lettre f (resp. g) désigne une application définie sur une partie U de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^{n+1}$ (resp. $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$) à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'inconnue est y ; c'est une fonction de la variable x définie dans un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et n fois dérivable.

On appelle *solution* (ou encore *intégrale*) de ($\mathscr{E}$) (resp. ($\mathscr{E}'$)) toute application φ définie dans un intervalle J de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, n fois dérivable et telle que :

$$\begin{aligned} & f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0 \\ \text{resp.} \quad & \varphi^{(n)}(x) = g\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}\right) \end{aligned}$$

Résoudre (ou intégrer) l'équation ($\mathscr{E}$) (resp. ($\mathscr{E}'$)) consiste à en déterminer toutes les solutions.

Remarques.

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), on parle d'équation différentielle réelle (resp. complexe).
2. Si φ est une solution de $(\mathscr{E})$ (resp. $(\mathscr{E}')$) définie dans un intervalle J de $\mathbb{R}$, la restriction de φ à tout sous-intervalle de J est encore une solution. Inversement, il existe des solutions de $(\mathscr{E})$ (resp. $(\mathscr{E}')$) qui prolongent (J, φ), ne serait-ce que (J, φ) elle-même.
   Si la seule solution de $(\mathscr{E})$ (resp. $(\mathscr{E}')$) qui prolonge (J, φ) est (J, φ), on dit que (J, φ) est *une solution maximale* de $(\mathscr{E})$ (resp. $(\mathscr{E}')$). On peut montrer que toute solution peut se prolonger en une solution maximale.
   Pour résoudre $(\mathscr{E})$ (resp. $(\mathscr{E}')$), il suffira donc de déterminer toutes les solutions maximales ; les autres en découlent par restriction à des sous-intervalles.

2 Équation différentielle du premier ordre

Dans tout 2, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.0.1 Théorème. *Soit* U *une partie de* $\mathbb{R}^2$. *On suppose que* U *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$, *c'est à dire que pour tout* $(x, y) \in \mathrm{U}$, *il existe* $r > 0$ *réel tel que* $]x - r, x + r[\times]y - r, y + r[\subset \mathrm{U}$. *Soit* $f : \mathrm{U} \mapsto \mathbb{R}$ *continue*[1]. *On suppose que* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *existe sur* U *et que cette application de* U *dans* $\mathbb{R}$ *est continue. Soit* $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$. *Alors il existe une et une seule solution maximale* φ *de l'équation différentielle* $y' = f(x, y)$ *telle que* $\varphi(x_0) = y_0$.

2.1 Équations à variables séparées

2.1.1 Définition. On appelle *équation différentielle à variables séparées* toute équation différentielle de la forme :

$$f(x) - y'g(y) = 0$$

où f est une fonction réelle continue définie dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, et où g est une fonction réelle continue définie dans un intervalle J de $\mathbb{R}$.

Résolution. Notations de 2.1.1. Pour qu'une application $x \to y(x)$ définie et dérivable dans un sous-intervalle I à valeurs dans J vérifie l'équation $f(x) - y'g(y) = 0$ il faut et il suffit que l'on ait $\int \big(f(x) - y'g(y)\big)\, dx = 0$, ce qui s'écrit aussi $\int f(x)\,dx - \int g(y)\,dy = 0$ (voir 6.0.1).

[1] Si $(a, b) \in \mathrm{U}$ alors f continue en (a, b) ; c'est à dire, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, si $(x, y) \in \mathrm{U}$, si $|a - x| < \eta$ et si $\left|b - y\right| < \eta$, alors $\left|f(a, b) - f(x, y)\right| < \varepsilon$.

Problème. Résoudre l'équation différentielle $e^x - y'e^{-y} = 0$.
On a $\int e^x\,dx - \int e^{-y}\,dy = 0$ donc on a $e^x + e^{-y} = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par conséquent on a $y = -\ln(\lambda - e^x)$. Si $\lambda \leqslant 0$ l'intervalle de $\mathbb{R}$ décrit par x est le vide. Si $\lambda > 0$, alors on a $\lambda - e^x > 0$ si et seulement si $x < \ln\lambda$. Les solutions maximales de l'équation $e^x - y'e^{-y} = 0$ sont donc les applications $x \to -\ln(\lambda - e^x)$ définies sur $]-\infty, \ln\lambda[$ ceci pour tout $\lambda > 0$ réel.

2.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

2.2.1 Définition. On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* toute équation différentielle de la forme :

$$y' = a(x)y + b(x)$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions réelles continues définies dans un intervalle J de $\mathbb{R}$.
L'équation :

$$y' = a(x)y$$

est appelée *l'équation sans second membre* (ou encore *homogène*) *associée à* $y' = a(x)y + b(x)$.

2.2.2 Proposition. *Notations de 2.2.1. Soit* $\mathrm{A}(x)$ *une primitive de* $a(x)$ *dans* J. *Alors les solutions maximales de l'équation sans second membre* $y' = a(x)y$ *sont les applications de* J *dans* $\mathbb{R}$ *de la forme :*

$$y = \lambda e^{\mathrm{A}(x)}$$

où λ *est une constante réelle arbitraire.*

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathrm{J}$; la fonction nulle sur J est la solution maximale de l'équation $y' = a(x)y$ nulle en x_0, ceci d'après 2.0.1. Les autres solutions ne s'annulent pas sur leur intervalle de définition ; elles sont donc toujours strictement positives ou toujours strictement négatives sur cet intervalle. On a donc

$$\begin{aligned}
y \text{ solution non nulle de } y' = a(x)y \iff & \frac{y'}{y} = a(x) \\
\iff & \int \frac{y'(x)}{y(x)} = \int a(x)\,dx \\
\iff & \ln\left|y\right| = \mathrm{A}(x) + \mathrm{C} \\
\iff & \left|y\right| = e^{\mathrm{C}} e^{\mathrm{A}(x)} \quad (\text{où } \mathrm{C} \in \mathbb{R}) \\
\iff & y = \lambda e^{\mathrm{A}(x)} \quad (\text{où } \lambda \in \mathbb{R}^*)
\end{aligned}$$

□

2.3 Résolution de $y' = a(x)y + b(x)$

Notations de 2.2.1. Pour résoudre l'équation $y' = a(x)y + b(x)$, nous allons utiliser une méthode connue sous le nom de méthode de variation de la constante. Posons $y_0 = e^{A(x)}$ (ou toute autre solution non nulle de l'équation sans second membre). Pour résoudre, effectuons le changement de fonction inconnue $z = yy_0^{-1}$. On a $y' = z'y_0 + zy_0'$ donc :

$$\begin{aligned} y' = a(x)y + b(x) &\iff z'y_0 + zy_0' = a(x)zy_0 + b(x) \\ &\iff z'y_0 = b(x) \\ &\iff z' = by_0^{-1} \end{aligned}$$

Les solutions maximales sont donc les fonctions $y = Fy_0 + Cy_0$ définies sur J, où F est une primitive de by_0^{-1} et où C est une constante réelle quelconque.
En pratique ce que l'on a noté ici $z(x)$ est plutôt noté $\lambda(x)$.

2.3.1 Corollaire. *Notations de 2.2.1. Alors les solutions maximales de l'équation différentielle $y' = a(x)y+b(x)$ s'obtiennent en ajoutant à une solution maximale particulière toutes les solutions maximales de $y' = a(x)y$.*

Exemple. Résoudre l'équation différentielle $y' = xy + e^{\frac{x^2}{2}}$.
Ici $J = \mathbb{R}$.

1. Résolution de $y' = xy$. On a $\frac{y'}{y} = x$ donc :

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int x\, dx$$

   Ainsi :

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c$$

   D'où :

$$y = \lambda e^{\frac{x^2}{2}}$$

   Avec λ constante réelle quelconque.

2. Résolution de $y' = xy + e^{\frac{x^2}{2}}$. Posons $y = \lambda(x)e^{\frac{x^2}{2}}$. On a :

$$y' = \lambda' e^{\frac{x^2}{2}} + \lambda e^{\frac{x^2}{2}} x$$

Donc :

$$\lambda' e^{\frac{x^2}{2}} + \lambda e^{\frac{x^2}{2}} x = x\lambda e^{\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}}$$

D'où :

$$\lambda'(x) = 1$$

C'est à dire que $\lambda(x) = x + c$ avec c constante réelle.

Les solutions maximales de $y' = xy + e^{\frac{x^2}{2}}$ sont donc les fonctions $y = (x+c)e^{\frac{x^2}{2}}$ où c est une constante réelle arbitraire.

2.4 Équations de Bernoulli

2.4.1 Définition. On appelle équation différentielle de Bernoulli toute équation différentielle de la forme :

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont deux fonctions réelles continues et définies dans un intervalle J de $\mathbb{R}$, et où α est une constante réelle différente de 0 et de 1.

Résolution. Notations de 2.4.1. Effectuons le changement de fonction inconnue $z = y^{1-\alpha}$. On a :

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Donc :

$$y' = \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z'$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha} &\iff \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z' = a(x) z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(x) z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ &\iff z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x) \qquad (2) \end{aligned}$$

Les solutions de $y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$ qui ne s'annulent pas sont les fonctions $z^{\frac{1}{1-\alpha}}$, où z est une solution quelconque de (2) qui ne s'annule pas.

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + y^2$.
Les solutions maximales sont :

- la fonction nulle définie sur $\mathbb{R}$.
- les fonctions $\frac{1}{1+\lambda e^x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où λ est une constante arbitraire positive.
- les fonctions $\frac{1}{1+\lambda e^x}$ définies sur $]-\ln(-\lambda),+\infty[$ où λ est une constante arbitraire strictement négative.
- les fonctions $\frac{1}{1+\lambda e^x}$ définies sur $]-\infty,-\ln(-\lambda)[$ où λ est une constante arbitraire strictement négative.

2.5 Équations de Riccati

2.5.1 Définition. On appelle équation différentielle de Riccati toute équation différentielle de la forme :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

où $a(x), b(x), c(x)$ sont des fonctions réelles continues et définies dans un intervalle J de $\mathbb{R}$.

Résolution. Supposons que l'on connaisse une solution particulière y_0 définie sur J. On peut alors résoudre l'équation donnée en effectuant le changement de fonction inconnue $z = y - y_0$. En effet, on a alors :

$$y' = y_0' + z'$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \\
&\iff y_0' + z' = a(x)(y_0 + z)^2 + b(x)(y_0 + z) + c(x) \\
&\iff z' = \big(2a(x)y_0 + b(x)\big)\, z + a(x)z^2
\end{aligned}$$

L'équation différentielle à résoudre est une équation de Bernoulli.

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{x^2}y^2 - \dfrac{1}{x}y + 1$ sur $]0,+\infty[$.
On peut remarquer que $x \to x$ est une solution particulière.
Les solutions maximales sont les fonctions :

$$x\left(1 - \frac{1}{\ln \frac{x}{\lambda}}\right)$$

sur $]0,\lambda[$ et sur $]\lambda,+\infty[$, avec λ réel strictement positif.

2.6 Équation homogène

2.6.1 Définition. On appelle *équation différentielle homogène* toute équation différentielle de la forme :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

où f est une fonction réelle continue et définie dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. Elle se reconnaît au fait qu'elle est invariante quand on remplace (x, y) par $(\lambda x, \lambda y)$.

Résolution.

1. On cherche tout d'abord s'il y a une solution de la forme $y = \alpha x$. Notons que : $y = \alpha x$ solution $\iff \alpha = f(\alpha)$; on dit que α est un point fixe de f.
2. Pour déterminer les autres solutions, on effectue le changement de fonction inconnue $z = \frac{y}{x}$. On a $y = zx$ donc :

   $$y' = z'x + z$$

   Et on a :

   $$\begin{aligned} y' = f\left(\frac{y}{x}\right) &\iff z'x + z = f(z) \\ &\iff z' = \frac{f(z) - z}{x} \end{aligned}$$

   Dans l'ensemble des (x, z) tels que $f(z) \neq z$, l'équation $z' = \frac{f(z)-z}{x}$ s'écrit $\frac{1}{x} - z'\frac{1}{f(z)-z} = 0$. C'est une équation à variables séparées.

Exercice. Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \frac{1}{x^2}y^2 - \frac{1}{x}y + 1$$

sur $]0, +\infty[$.

3 Équations différentielles linéaires d'ordre n

3.0.1 Définition. On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre n* une équation différentielle de la forme :

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b(x) \qquad (\mathscr{E}_1)$$

où les $a_i(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues définies dans un intervalle J de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) on parle d'équation différentielle linéaire d'ordre n réelle (resp. complexe).
L'équation :

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} \qquad (\mathscr{E}_2)$$

est appelée l'équation homogène, ou sans second membre, associée à $(\mathscr{E}_1)$.

3.0.2 Théorème. *Notations de 3.0.1. Soient $x_0 \in \mathrm{J}$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$. Alors il existe une et une seule solution maximale y de $(\mathscr{E}_1)$ telle que :*

$$y(x_0) = \lambda_0, y'(x_0) = \lambda_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \lambda_{n-1}$$

De plus y est définie sur J.

Démonstration. Admis. □

3.0.3 Théorème. *Soit* E *l'ensemble des solutions maximales de l'équation sans second membre $(\mathscr{E}_2)$. Alors :*

1. $0 \in \mathrm{E}$.
2. *Si $y_1, y_2 \in \mathrm{E}$ et si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, alors $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathrm{E}$. Par conséquent* E *est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathrm{J},\mathbb{K})$.*
3. *Soit $x_0 \in \mathrm{J}$. Soit $\Phi_{x_0} : \mathrm{E} \mapsto \mathbb{K}^n$ définie par :*

   $$\Phi_{x_0}(y) = \Big(y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)\Big)$$

   Alors Φ_{x_0} est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
4. *L'espace vectoriel* E *est de dimension n.*
5. *Soit $x_0 \in \mathrm{J}$. Soient $\big(y_1, \ldots, y_p\big)$ une suite de p éléments de* E. *Posons :*

   $$v_i = \Big(y_i(x_0), y_i'(x_0), \ldots, y_i^{(n-1)}(x_0)\Big)$$

   pour $i = 1, \ldots, p$. Alors la suite $\big(y_1, \ldots, y_p\big)$ est une suite libre dans E *si et seulement si $\big(v_1, \ldots, v_p\big)$ est une suite libre dans $\mathbb{K}^n$.*
6. *Soit $x_0 \in \mathrm{J}$. Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ une suite d'éléments de* E. *Alors cette suite est une base de* E *si et seulement si :*

   $$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

7. *Soit* $(y_1, \dots, y_n)$ *une suite d'éléments de* E. *Soit* $\delta : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$ *définie par :*

$$\delta(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Alors $\delta(x) \neq 0$ *pour au moins un* x *de* J *si et seulement si* $\delta(x) \neq 0$ *pour tout* x *de* J. *D'autre part* δ *est continue. On dit que* δ *est le wronskien de* $(y_1, \dots, y_n)$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et si* δ *ne s'annule pas, alors* δ *est toujours positive sur* J *ou toujours négative sur* J.

Démonstration. Exercice. □

3.0.4 Théorème. *Notations de 3.0.1. Soit* y_0 *une solution maximale particulière de* $(\mathscr{E}_1)$*. Alors on obtient toutes les solutions maximales de* $(\mathscr{E}_1)$ *en ajoutant à* y_0 *toutes les solutions maximales de* $(\mathscr{E}_2)$*.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} y \text{ solution maximale de } (\mathscr{E}_1) &\iff \begin{cases} y : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K} \quad n \text{ fois dérivable et} \\ y^{(n)} = a_0 y + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + b(x) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y - y_0 : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K} \quad n \text{ fois dérivable et} \\ (y - y_0)^{(n)} = a_0 (y - y_0) + \dots \\ \qquad\qquad + a_{n-1} (y - y_0)^{(n-1)} \end{cases} \\ &\iff y - y_0 \text{ est solution maximale de } (\mathscr{E}_2) \\ &\iff y = y_0 + z \end{aligned}$$

Où z est une solution maximale de $(\mathscr{E}_2)$. □

3.0.5 Proposition. *Notations de 3.0.1. Supposons* $b(x) = \alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x)$ *avec* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ *et* $b_1(x), b_2(x)$ *des applications continues de* J *dans* $\mathbb{K}$*. Alors, si* y_1 *(resp.* y_2*) est une solution maximale de :*

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + b_1(x) \quad \textit{(resp. } b_2(x)\textit{)}$$

$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ *est une solution maximale de* $(\mathscr{E}_1)$*.*

Démonstration. Exercice. □

3.1 Méthode de variation des constantes

Notations de 3.0.1. Supposons connues n solutions maximales linéairement indépendantes de l'équation sans second membre ($\mathscr{E}_2$) associée à ($\mathscr{E}_1$). Les solutions maximales de ($\mathscr{E}_2$) sont les applications de J dans $\mathbb{K}$ de la forme :

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$$

avec $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$. On admettra que les solutions maximales de ($\mathscr{E}_1$) sont les applications de J dans $\mathbb{K}$ de la forme :

$$c_1(x) y_1 + \cdots + c_n(x) y_n$$

où $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ sont des applications dérivables de J dans $\mathbb{K}$ vérifiant le système :

$$\left|\begin{array}{r} c_1'(x) y_1 + \cdots + c_n'(x) y_n = 0 \\ c_1'(x) y_1' + \cdots + c_n'(x) y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1'(x) y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1'(x) y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'(x) y_n^{(n-1)} = b(x) \end{array}\right.$$

Pour chaque x dans J, ce système est un système de Cramer ; c'est à dire qu'il comporte n équations linéaires à n inconnues avec une et une seule solution.

En résolvant ce système on obtient donc de manière unique, et pour chaque x dans J, les $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$. On en déduit $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ qui sont définies à une constante additive près appartenant à $\mathbb{K}$.

Exercice. On considère l'équation différentielle :

$$y'' = -\frac{2}{x^2} y + \frac{2}{x} y' + \sin x \qquad (1)$$

sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que les solutions de (1) sont les fonctions de la forme $y = \alpha x + \beta x^2$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
2. Montrer que les solutions de (1) sont les fonctions de la forme :

$$y = x \cos x + x^2 \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt + \alpha x + \beta x^2$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4 Équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants

Rappel. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On pose :

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b \quad \text{et} \quad e^{z} = e^{a} e^{ib}$$

Il est immédiat que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

On vérifie facilement que pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'application de J dans $\mathbb{C}$ qui à tout x associe $e^{\lambda x}$ est dérivable, et l'on a

$$\left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda e^{\lambda x}$$

4.0.1 Définition. On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants* toute équation de la forme :

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} + b(x) \tag{E$_1$}$$

où les a_i appartiennent à $\mathbb{K}$ et où $b(x)$ est une fonction continue définie dans un intervalle J de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) on parle d'équation différentielle réelle (resp. complexe) linéaire d'ordre n à coefficients constants.

L'équation sans second membre (ou encore homogène) associée à (E$_1$) est :

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} \tag{E$_2$}$$

On appelle *équation caractéristique* de (E$_2$) l'équation de degré n :

$$\mathrm{X}^n = a_0 + a_1 \mathrm{X} + \cdots + a_{n-1} \mathrm{X}^{n-1} \tag{E$_3$}$$

4.0.2 Théorème. *Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les racines de* (E$_3$). *On a de manière unique :*

$$\mathrm{X}^n - a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} - \cdots - a_1 \mathrm{X} - a_0 = \left(\mathrm{X} - \lambda_1\right)^{h_1} \ldots \left(\mathrm{X} - \lambda_p\right)^{h_p}$$

En ne répétant pas un même λ_i. On dit que l'entier strictement positif h_i est l'ordre de multiplicité *de λ_i. On a $h_1 + \cdots + h_p = n$.*

Alors l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ constitué par les solutions complexes de (E$_2$) *admet pour base la suite :*

$$\begin{array}{l} e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{h_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, x e^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{h_2 - 1} e^{\lambda_2 x}, \\ \vdots \\ e^{\lambda_p x}, x e^{\lambda_p x}, \ldots, x^{h_p - 1} e^{\lambda_p x} \end{array}$$

Démonstration. Admis ; exercice éventuel. □

Exemple. Résoudre dans le domaine complexe :

$$y^{(4)} = -y - 2y'' \tag{1}$$

L'équation caractéristique de (1) est $X^4 = -1-2X^2$, ou encore $X^4+2X^2+1 = 0$. On a :

$$X^4 + 2X^2 + 1 = (X - i)^2 (X + i)^2 = 0$$

Les solutions maximales complexes de (1) sont donc les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme :

$$\alpha_1 e^{ix} + \alpha_2 x e^{ix} + \beta_1 e^{-ix} + \beta_2 x e^{-ix}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$.

4.0.3 Théorème. *Notations de 4.0.1. Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué par les solutions maximales réelles de l'équation (E_2). Pour obtenir une base de E, on peut procéder ainsi :*

- *On calcule les racines de (E_3) dans $\mathbb{C}$.*
  - *Si λ est racine réelle de (E_3), alors on retient λ.*
  - *Si λ est une racine complexe non réelle de (E_3), alors $\overline{\lambda}$ est aussi une racine de (E_3) ; on retient soit λ, soit $\overline{\lambda}$.*
- *On obtiendra une base de E en prenant, pour chacune des racines réelles λ, les fonctions :*

  $$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \ldots, x^{h-1} e^{\lambda x}$$

  Et pour chacune des racines complexes non réelles retenues, les parties réelles et imaginaires de :

  $$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \ldots, x^{h-1} e^{\lambda x}$$

  où h est l'ordre de multiplicité de λ.

Exemple. Résoudre dans le domaine réel l'équation différentielle :

$$y^{(4)} = -y - 2y'' \tag{1}$$

L'équation caractéristique de (1) est $X^4 = -1 - 2X^2$ ou encore $X^4 + 2X^2 + 1 = (X - i)^2 (X + i)^2$. D'après 4.0.3, les solutions maximales réelles de (1) sont les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$\alpha_1 \operatorname{Re}(e^{ix}) + \alpha_2 \operatorname{Im}(e^{ix}) + \beta_1 \operatorname{Re}(x e^{ix}) + \beta_2 \operatorname{Im}(x e^{ix})$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$; c'est à dire les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x + \beta_1 x \cos x + \beta_2 x \sin x$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Exemple. On considère l'équation :

$$y'' = -13y + 4y' \tag{2}$$

1. Résoudre (2) dans le domaine complexe.
2. Résoudre (2) dans le domaine réel.

L'équation caractéristique de (2) est :

$$X^2 = -13 + 4X$$

Elle admet pour racines dans $\mathbb{C}$: $2+3i$ et $2-3i$. On a :

$$X^2 - 4X + 13 = (X - (2+3i))(X - (2-3i))$$

1. Les solution maximales complexes de (2) sont les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme :
$$y = \alpha e^{(2+3i)x} + \beta e^{(2-3i)x}$$
avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. Les solutions maximales de (2) sont les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :
$$y = \alpha \operatorname{Re}\left(e^{(2+3i)x}\right) + \beta \operatorname{Im}\left(e^{(2+3i)x}\right)$$
avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :
$$e^{(2+3i)x} = e^{2x}e^{3ix} = e^{2x}(\cos 3x + i \sin 3x)$$
Les solutions maximales réelles de (2) sont les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :
$$y = \alpha e^{2x}\cos 3x + \beta e^{2x}\sin 3x$$
avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

5 Résolution de l'équation (E_1)

Pour résoudre (E_1) on peut résoudre l'équation sans second membre (E_2) associée à (E_1) comme indiqué en 4.0.2 et 4.0.3, puis faire appel à la méthode de variation des constantes (voir 3.1).

Pour certaines fonctions $b(x)$ on peut procéder plus simplement. On détermine tout d'abord une solution maximale particulière de (E_1) ; on résout (E_2), et on conclut au moyen de 3.0.4.

5.0.1 Proposition. *Supposons que* $b(x) = \mathrm{P}(x)e^{\lambda x}$*, où* $\mathrm{P}(x)$ *est un polynôme à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *dont le degré est* p*, et où* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Alors l'équation* (E_1) *admet toujours une solution maximale particulière de la forme :*

$$\left(\sum_{j=0}^{p} a_j x^k\right) e^{\lambda x}$$

si λ *n'est pas racine de l'équation caractéristique* (E_3) *de* (E_2) *; et de la forme :*

$$\left(\sum_{j=h}^{p+h} a_j x^j\right) e^{\lambda x}$$

si λ *est une racine de* (E_3) *d'ordre de multiplicité* h *(*$h \geqslant 1$*).*

En pratique, une telle solution particulière s'obtient en procédant par identification.

5.0.2 Corollaire. *Supposons que* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et que :*

$$b(x) = p \sin \lambda x + q \cos \lambda x$$

avec $p, q, \lambda \in \mathbb{R}$*. Alors l'équation* (E_1) *admet toujours une solution maximale particulière de la forme :*

$$c \sin \lambda x + d \cos \lambda x$$

où $c, d \in \mathbb{R}$*, ceci quand* $i\lambda$ *n'est pas racine de* (E_3) *; si au contraire* $i\lambda$ *est racine de* (E_3) *et si* h *est son ordre de multiplicité, alors* (E_1) *admet toujours une solution maximale particulière de la forme :*

$$x^h (c \sin \lambda x + d \cos \lambda x)$$

Démonstration. Exercice. □

5.0.3 Corollaire. *Supposons que* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et que :*

$$b(x) = \big(\mathrm{P}(x) \sin \beta x + \mathrm{Q}(x) \cos \beta x\big)\, e^{\alpha x}$$

où $\mathrm{P}(x)$ *et* $\mathrm{Q}(x)$ *sont des polynômes à coefficients réels et où* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Soit* $r = \sup\big(\deg \mathrm{P}, \deg \mathrm{Q}\big)$*. Alors* (E_1) *admet toujours une solution maximale particulière de la forme :*

$$\left(\left(\sum_{j=1}^{r} c_j x^j\right) \sin \beta x + \left(\sum_{j=1}^{r} d_j x^j\right) \cos \beta x\right) e^{\alpha x}$$

où $c_j, d_j \in \mathbb{R}$, ceci quand $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de (E_3).
Si $\alpha + i\beta$ est racine de (E_3) *avec h ($\geqslant 1$) comme ordre de multiplicité, alors* (E_1) *admet toujours une solution maximale particulière de la forme :*

$$\left(\left(\sum_{j=h}^{r+h} c_j x^j\right)\sin\beta x + \left(\sum_{j=h}^{r+h} d_j x^j\right)\cos\beta x\right)e^{\alpha x}$$

où $c_j, d_j \in \mathbb{R}$.

Exercice. Résoudre dans le domaine réel :

$$y'' = -\frac{3}{4}y + 2y' + \sin x \tag{1}$$

L'équation homogène associée est :

$$y'' = -\frac{3}{4}y + 2y' \tag{2}$$

Son équation caractéristique est :

$$X^2 = -\frac{3}{4} + 2X$$

On a :

$$X^2 - 2X + \frac{3}{4} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{3}{2}\right) = 0$$

Les solutions maximales réelles de (2) sont les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$y = \alpha e^{\frac{1}{2}x} + \beta e^{\frac{3}{2}x}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
On cherche maintenant une solution maximale particulière de (1) de la forme :

$$y = c\sin x + d\cos x$$

avec $c, d \in \mathbb{R}$. En effet, i n'est pas racine de l'équation caractéristique.

$$y' = c\cos x - d\sin x \quad \text{et} \quad y'' = -c\sin x - d\cos x$$

On reporte ceci dans (1) ; on obtient après simplification :

$$\left(-\frac{c}{4} + 2d - 1\right)\sin x + \left(-\frac{d}{4} - 2c\right)\cos x = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Il en résulte que $-\frac{c}{4}+2d-1=0$ et $-\frac{d}{4}-2c=0$. On a donc :

$$c=-\frac{4}{65} \quad \text{et} \quad d=\frac{32}{65}$$

Les solutions maximales de (1) sont donc les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$y=\alpha e^{\frac{1}{2}x}+\beta e^{\frac{3}{2}x}-\frac{4}{65}\sin x+\frac{32}{65}\cos x$$

avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Exercice. Résoudre dans le domaine réel :

$$y^{(4)}=y+\cos x \tag{3}$$

L'équation homogène associée est :

$$y^{(4)}=y \tag{4}$$

L'équation caractéristique associée à (4) est :

$$X^4=1$$

On a :

$$X^4-1=(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)=0$$

Les solutions maximales réelles de (4) sont d'après 4.0.3 les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$\begin{aligned} y&=\alpha_1e^x+\alpha_2e^{-x}+\beta_1\operatorname{Re}\left(e^{ix}\right)+\beta_2\operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)\\ &=\alpha_1e^x+\alpha_2e^{-x}+\beta_1\cos x+\beta_2\sin x\end{aligned}$$

où $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ sont des constantes réelles arbitrairement fixées.

On cherche maintenant une solution maximale réelle arbitraire de (3) de la forme :

$$y=x\,(c\sin x+d\cos x)$$

avec c,d réels. En effet, i est une racine d'ordre 1 de l'équation caractéristique. On a :

$$y^{(4)}=(4d+cx)\sin x-(4c-dx)\cos x$$

On reporte dans (3), et on obtient :

$$\begin{aligned}(4d+cx)\sin x-(4c-dx)\cos x&=xc\sin x+xd\cos x+\cos x\\ &=cx\sin x+(1+dx)\cos x\end{aligned}$$

On en déduit en prenant $x = 0$, que :

$$-4c = 1 \iff c = -\frac{1}{4}$$

et en prenant $x = \frac{\pi}{2}$, que :

$$4d + c\frac{\pi}{2} = c\frac{\pi}{2}$$

et donc $d = 0$.

Les solutions maximales réelles de (3) sont donc les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$y = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x} + \beta_1 \cos x + \beta_2 \sin x - \frac{x}{4} \sin x$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont des constantes réelles arbitrairement fixées.

Chapitre IV

Intégrale dépendant d'un paramètre

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Fonctions numériques de deux variables réelles

1.0.1 Définitions.

1. Soit $\left(u_n, v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ et soit (a, b) un point de $\mathbb{R}^2$. On dit que la suite $\left(u_n, v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (a, b) si l'on a $\lim u_n = a$ et $\lim v_n = b$. On écrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_n, v_n\right) = (a, b)$$

   et l'on dit que la suite $\left(u_n, v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet (a, b) comme limite.
2. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que A est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ si :
   (a) Il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathrm{A}$, l'on ait :

$$|x| \leqslant \mathrm{M} \quad \text{et} \quad \left|y\right| \leqslant \mathrm{M}$$

   On dit que A est bornée dans $\mathbb{R}^2$.
   (b) Tout élément de $\mathbb{R}^2$ qui est limite d'une suite de points de A appartient lui-même à A.

Exemple (très particulier)**.** Toute partie de $\mathbb{R}^2$ de la forme $[a, b] \times [c, d]$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

1.0.2 Théorème. *Soit* A *une partie compacte de* $\mathbb{R}^2$. *Alors de toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* A *on peut extraire une suite qui converge vers un point de* A.

Démonstration. Admis. □

1.0.3 Définitions. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : A \mapsto \mathbb{K}$.

1. Soit $(a,b) \in A$. On dit que f est continue en (a,b) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,$$
$$\begin{pmatrix} (x,y) \in A, \\ |x-a| < \eta, \left|y-b\right| < \eta \end{pmatrix} \Longrightarrow \left|f(x,y)-f(a,b)\right| < \varepsilon$$

   Il est équivalent de dire que pour toute suite $(u_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A, la suite $(f\ (u_n,v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a,b)$.

2. On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.
3. On dit que f est uniformément continue sur A si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,$$
$$\begin{pmatrix} (x_1,y_1) \in A,\ (x_2,y_2) \in A, \\ \left|x_1-x_2\right| < \eta, \left|y_1-y_2\right| < \eta \end{pmatrix} \Longrightarrow \left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right| < \varepsilon$$

   Il est immédiat que si f est uniformément continue sur A alors f est continue sur A.

1.0.4 Théorème. *Soit* A *une partie compacte de* $\mathbb{R}^2$ *et soit* $f : A \mapsto \mathbb{K}$ *continue. Alors* f *est uniformément continue.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. On suppose que f n'est pas uniformément continue. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x_1,y_1) \in A, \exists (x_2,y_2) \in A,$$
$$\left|x_1-x_2\right| < \eta, \left|y_1-y_2\right| < \eta \quad \text{et} \quad \left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right| \geqslant \varepsilon$$

On choisit $\varepsilon > 0$ tel que la condition ci-dessus soit remplie.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soient $(u_{n1}, v_{n1}), (u_{n2}, v_{n2}) \in A$ tels que :

$$\left|u_{n1}-u_{n2}\right| < \frac{1}{n}, \left|v_{n1}-v_{n2}\right| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \left|f(u_{n1},v_{n1})-f(u_{n2},v_{n2})\right| \geqslant \frac{1}{n}$$

Soit $(u_{n_k2}, v_{n_k2})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(u_{n2}, v_{n2})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $(x,y) \in A$ (voir 1.0.2). On a :

$$\left|u_{n_k1}-u_{n_k2}\right| < \frac{1}{n_k} \quad \text{et} \quad \left|v_{n_k1}-v_{n_k2}\right| < \frac{1}{n_k}$$

La suite $\left(u_{n_k 1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ (resp. $\left(v_{n_k 1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$) converge donc vers x (resp. y). Autrement dit, la suite $\left(u_{n_k 1}, v_{n_k 1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers (x, y).

Comme f est continue, on a :

$$\lim_k f(u_{n_k 1}, v_{n_k 1}) = f(x,y) \quad \text{et} \quad \lim_k f(u_{n_k 2}, v_{n_k 2}) = f(x,y)$$

On a donc :

$$\lim_{k\to+\infty} \left|f(u_{n_k 1}, v_{n_k 1}) - f(u_{n_k 2}, v_{n_k 2})\right| = 0$$

Ce qui est absurde car :

$$\left|f(u_{n_k 1}, v_{n_k 1}) - f(u_{n_k 2}, v_{n_k 2})\right| \geqslant \varepsilon$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

1.0.5 Proposition. *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}^2$ *et soient* f, g *deux applications de* A *dans* $\mathbb{K}$ *continues en un point donné* (a, b) *de* A. *Alors :*

1. $f + g$ *est continue en* (a, b).
2. fg *est continue en* (a, b).
3. λf *est continue en* (a, b) *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$.
4. *Si* f *ne s'annule pas,* $\frac{1}{f} : \mathrm{A} \mapsto \mathbb{K}$ *définie par* $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$ *est continue en* (a, b).
5. $\left|f\right| : \mathrm{A} \mapsto \mathbb{K}$ *définie par* $\left|f\right|(x) = \left|f(x)\right|$ *est continue en* (a, b).
6. *Supposons que* $\mathrm{A} = \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *avec* $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{Y} \subset \mathbb{R}$. *Soit* $f_a : \mathrm{Y} \mapsto \mathbb{K}$ *définie par* $f_a(y) = f(a, y)$ *et soit* $f_b : \mathrm{X} \mapsto \mathbb{K}$ *définie par* $f_b(x) = f(x, b)$.
   Alors f_a *(resp.* f_b*) est continue en* b *(resp. en* a*).*

Démonstration. Exercice. □

Exemple. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : \mathrm{A} \mapsto \mathbb{K}$ une fraction rationnelle à deux variables réelles, et à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors f est continue sur A.

Par exemple $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{3x^3y + 5x^4 + 1}{x^4 + y^6}$$

est continue.

2 Intégrales définies dépendant d'un paramètre

2.0.1 Lemme. *Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \times \mathrm{X} \mapsto \mathbb{K}$ une application continue sur $[a, b] \times \mathrm{X}$. Soit $x_0 \in \mathrm{X}$.*
Alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\left(x \in \mathrm{X}, \left|x - x_0\right| < \eta \;\; et \;\; t \in [a, b]\right) \Longrightarrow \left|f(t, x) - f(t, x_0)\right| < \varepsilon$$

Démonstration. Admis. Analogue à 1.0.4. □

2.0.2 Théorème. *Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, X une partie de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \times \mathrm{X} \mapsto \mathbb{K}$ continue. Soit $\mathrm{F} : \mathrm{X} \mapsto \mathbb{K}$ définie par :*

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^b f(t, x)\, dt$$

est continue sur X.

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathrm{X}$; montrons que F est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. D'après 2.0.1, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\left(x \in \mathrm{X}, \left|x - x_0\right| < \eta \text{ et } t \in [a, b]\right) \Longrightarrow \left|f(t, x) - f(t, x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Si $x \in \mathrm{X}$ et si $\left|x - x_0\right| < \eta$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)\right| &= \left|\int_a^b f(t, x)\, dt - \int_a^b f(t, x_0)\, dt\right| \\
&= \left|\int_a^b \left(f(t, x) - f(t, x_0)\right)\, dt\right| \\
&\leqslant \int_a^b \left|f(t, x) - f(t, x_0)\right|\, dt \\
&\leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a}\, dt \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

□

2.0.3 Définitions. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathrm{I} \times \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$.

1. Soit $a_0 \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$; on a $a_0 = (t_0, x_0)$. Soit $f_{t_0} : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$ définie par $f_{t_0}(x) = f(t_0, x)$ pour tout $x \in \mathrm{J}$.

   Si f_{t_0} est dérivable en x_0, $\left(f_{t_0}\right)'(x_0)$ est appelée *la dérivée partielle de f par rapport à x en a_0* et est notée :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0)$$

2. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ existe pour tout $a \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$, l'application de $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ dans $\mathbb{K}$ qui à tout $a \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$ associe $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ est notée :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$$

   et est appelée la (fonction) dérivée partielle de f par rapport à x sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$.

2.0.4 Théorème (dérivation sous le signe $\int$). *Soit* J *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : [a, b] \times \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$ *continue. On suppose que* $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ *existe sur* $[a, b] \times \mathrm{J}$ *et qu'elle est continue. Soit* $\mathrm{F} : \mathrm{J} \mapsto \mathbb{K}$ *définie par :*

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^b f(t, x)\, dt$$

pour tout $x \in \mathrm{J}$.

Alors F *est dérivable et l'on a :*

$$\mathrm{F}'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\, dt$$

Rappelons que comme $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ *est continue sur* $[a, b] \times \mathrm{J}$*, l'application de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{K}$ *qui à* t *associe* $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ *est continue sur* $[a, b]$*, ceci pour tout* $x \in \mathrm{J}$.

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathrm{J}$. Montrons que :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{J} \setminus \{x_0\}}} \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)\, dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après 2.0.1 appliqué à $\frac{\partial f}{\partial x}$ il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\left(x \in \mathrm{J}, \left|x - x_0\right| < \eta, t \in [a, b]\right) \Longrightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Soit $t \in [a,b]$ et soit $x \in \mathrm{J} \setminus \{x_0\}$.

Appliquons le théorème des accroissements finis sur le segment d'extrémités x et x_0 à la fonction dérivable qui à tout u associe $f(t,u) - (u - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)$: il existe c strictement compris entre x et x_0 tel que :

$$\frac{\left[f(t,x) - (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\right] - \left[f(t,x_0)\right]}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(t,c) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)$$

Autrement dit tel que :

$$\frac{f(t,x) - f(t,x_0)}{x - x_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,c) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)$$

Soit $x \in \mathrm{J} \setminus \{x_0\}$ tel que $\left|x - x_0\right| < \eta$; on a aussi $\left|c - x_0\right| < \eta$, donc on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,c) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Et par conséquent :

$$\left|\frac{f(t,x) - f(t,x_0)}{x - x_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Soit alors $x \in \mathrm{J} \setminus \{x_0\}$ tel que $\left|x - x_0\right| < \eta$; on a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\,dt\right| &= \left|\begin{array}{l}\displaystyle\int_a^b \frac{f(t,x) - f(t,x_0)}{x - x_0}\,dt \\ \displaystyle -\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\,dt\end{array}\right| \\
&\leqslant \int_a^b \left|\frac{f(t,x) - f(t,x_0)}{x - x_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\right| dt \\
&\leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Exemple. Soit $f_n : [0,1] \times]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f_n(t,x) = \frac{1}{(t^2 + x^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

La fonction f_n est continue sur $[0,1]\times]0,+\infty[$. On a :

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}(t,x) = -\frac{2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}$$

La fonction $\frac{\partial f_n}{\partial x}(t,x)$ est continue sur $[0,1]\times]0,+\infty[$.
Soit $F_n :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$F_n(x) = \int_0^1 \frac{1}{(t^2+x^2)^n}\,dt$$

D'après 2.0.4, F_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et l'on a :

$$F_n'(x) = \int_0^1 \frac{-2nx}{(t^2+x^2)}\,dt$$

On a donc :

$$F_n'(x) = -2nxF_{n+1}(x) \tag{1}$$

On a $F_1(x) = \frac{1}{x}\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$; en utilisant (1) on obtient $F_2(x)$, puis $F_3(x)$, *etc*.