Cours de Maths 1
de E. Ménard

FMdKdD
fmdkdd [à] free.fr

Université du Havre
Année 2007–2008

Table des matières

Chapitre 1

Ensembles et applications

1.1 Notions

1.1.1 Notion d'ensemble

On appelle *ensemble* une collection d'objets rassemblés en vertu *d'une propriété commune*. Ces objets sont appelés *les éléments* ou *les points* de l'ensemble. Un ensemble peut être fini ou infini. Des ensembles particulièrement importants sont représentés par des lettres déterminantes :

$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels : 0,1,2,...
$\mathbb{N}^*$: ensemble des entiers naturels non nuls
$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs : 0,1,2,...,-1,-2,...
$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes

1.1.2 Notion d'appartenance

Soit E un ensemble. Au lieu de dire qu'un objet x est élément de E, on dit que x appartient à E qu'on écrit : $x \in E$.
La négation de cette propriété s'écrit : $x \notin E$.
L'ensemble qui n'a aucun élément est appelé ensemble vide, noté $\emptyset$.
Un ensemble qui n'a qu'un élément a est noté $\{a\}$, on parle du singleton a.
Un ensemble qui n'a que n éléments, à savoir $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se note $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

1.1.3 Notions d'inclusions et d'égalité

Soient E, F des ensembles. On dit que « E est inclu dans F » si tout élément de E est élément de F. On dit aussi que « E est contenu dans F », que « E est un sous-ensemble de F » ou que « E est une partie de F ». Cela se note :

$$E \subset F \quad \text{ou} \quad F \supset E$$

Par exemple, on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
La négation de $E \subset F$, notée $E \not\subset F$, s'exprime ainsi :

« Tous les éléments de E ne sont pas des éléments de F. »

ou bien :

« Au moins un élément de E n'est pas un élément de F. »

On dit que « E est égal à F », ou « E est identique à F » si on a $E \subset F$ *et* $F \subset E$. On écrit alors $E = F$.

Remarque. Pour tout ensemble E, on a $E \subset E$ et $\emptyset \subset E$. Pour tous ensembles E, F, G, tels que $E \subset F$ et $F \subset G$, on a $E \subset G$.

1.1.4 Notion de propriété

Soit E un ensemble. Soit $p(x)$ une propriété concernant tout $x \in E$, qui est vraie pour certains x de E et fausse pour les autres. Alors, l'ensemble des $x \in E$ tel que $p(x)$ est vraie est un sous-ensemble de E noté :

$$\left\{x / x \in E, p(x)\right\} \quad \text{ou} \quad \left\{x \in E / p(x)\right\}$$

Exemple. L'ensemble des entiers naturels pairs est :

$$\left\{x \in \mathbb{N} / x \bmod 2 = 0\right\} \quad \text{ou} \quad \{x \in \mathbb{N} / x \text{ multiple de } 2\}$$
$$\text{ou encore} \quad \left\{2p / p \in \mathbb{N}\right\}$$

1.1.5 Notion de partie d'un ensemble

Soit E un ensemble. L'ensemble dont les éléments sont les parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.

Exemple. Si $E = \{a, b, c\}$, $\mathscr{P}(E) = \left\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\right\}$.

On peut démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n, que si E est un ensemble fini à n éléments, $\mathscr{P}(E)$ est un ensemble fini à 2^n éléments.

1.2 Opérations sur les ensembles

1.2.1 Intersection

L'intersection de deux ensembles E et F est un ensemble constitué de tout $x \in E$ et $x \in F$, noté $E \cap F$ (E *inter* F). On a :

$$E \cap F = \left\{x / x \in E \text{ et } x \in F\right\}$$

Si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont disjoints.

Remarque. On a $E \cap F \in E$ et $E \cap F \in F$.

1.2.2 Réunion

La réunion (ou union) de deux ensembles E et F est l'ensemble des x tels que $x \in E$ ou $x \in F$, noté $E \cup F$ (E *union* F). On a :

$$E \cup F = \left\{x/x \in E \text{ ou } x \in F\right\}$$

Remarque. On a $E \cup F \supset E$ et $E \cup F \supset F$.

1.2.3 Sous ensemble complémentaire

Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle « complémentaire de A dans E » le sous-ensemble de E constitué des éléments de E n'appartenant pas à A ; on le note $\complement_E A$. On a :

$$\complement_E A = \left\{x \in E/x \notin A\right\}$$

Remarque. On a $A \cap \complement_E A = \emptyset$ et $A \cup \complement_E A = E$.

1.2.4 Différence

La différence de deux ensembles E et F, notée $E \setminus F$ (E *moins* F), est définie par :

$$E \setminus F = \left\{x \in E/x \notin F\right\}$$

1.2.5 Différence symétrique

La différence symétrique de deux ensembles E et F, c'est l'ensemble $E\Delta F$ défini par :

$$\begin{gathered}
E\Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) \\
\text{ou} \quad E\Delta F = (E \cup F) \setminus (E \cap F) \\
\text{ou encore} \quad E\Delta F = \complement_{(E\cup F)}(E \cap F)
\end{gathered}$$

1.2.6 Propositions

Soient E, F, G des ensembles.

$$\begin{gathered}
E \cap F = F \cap E \quad \text{et} \quad E \cup F = F \cup E \\
(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G) \\
E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup G \quad \text{et} \quad E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G) \\
\complement_E \emptyset = E \quad \text{et} \quad \complement_E E = \emptyset \\
A \subset E \quad \Longrightarrow \quad \complement_E(\complement_E A) = A
\end{gathered}$$

Pour tous A, B sous-ensembles de E :

$$\begin{gathered}
\complement_E(A \cup B) = \left(\complement_E A\right) \cap \left(\complement_E B\right) \\
\complement_E(A \cap B) = \left(\complement_E A\right) \cup \left(\complement_E B\right)
\end{gathered}$$

Remarque. Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des ensembles, on définit de manière évidente $E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n$, noté :

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i$$

Ainsi que $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$, noté :

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

1.3 Notions de logique

1.3.1 Propriétés

Soit E un ensemble. Notons p ou $p(x)$ une propriété sur E (qui concerne les x de E). Soit $x \in E$. Si $p(x)$ est vraie, on dira « on a $p(x)$ », ou encore « $p(x)$ ».
Soient p et q des propriétés sur E.
La négation de p est la propriété sur E, notée « non p », définie par :

> (non p)(x) est vraie si et seulement si $p(x)$ est fausse.

La conjonction de p et q est la propriété sur E, notée « p et q » ($p \wedge q$), définie par :

> (p et q)(x) est vraie si et seulement si $p(x)$ et $q(x)$ sont vraies.

La disjonction de p et q est la propriété sur E, notée « p ou q », définie par :

> (p ou q)(x) vraie si et seulement si $p(x)$ ou $q(x)$ vraie (« ou » inclusif).

On dit que « p implique q », et on écrit « $p \Longrightarrow q$ », si tout élément de E qui vérifie p vérifie q (on parle d'implication). La négation de ($p \Longrightarrow q$) signifie qu'il existe un élément x de E qui vérifie p mais pas q.
On dit que p et q sont équivalentes, qu'on écrit « $p \iff q$ », si $p \Longrightarrow q$ et $q \Longrightarrow p$.

Exemple. Soient $E = \mathbb{N}$, $p = \{2x/x \in E\}$ et $q = \{6x/x \in E\}$. On a $q \Longrightarrow p$ mais pas $p \Longrightarrow q$.

Remarque. Posons $A = \{x \in E/p(x)\}$ et $B = \{x \in E/q(x)\}$. Alors :

$$\begin{gathered}
\left\{x \in E/(\text{non}\, p)(x)\right\} = \complement_E A \\
\left\{x \in E/(p \text{ et } q)(x)\right\} = A \cap B \\
\left\{x \in E/(p \text{ ou } q)(x)\right\} = A \cup B \\
p \Longrightarrow q \quad \text{correspond à} \quad A \subset B \\
p \iff q \quad \text{correspond à} \quad A = B
\end{gathered}$$

1.3.2 Quantificateurs

Le symbole $\exists$ se lit « il existe », et le symbole $\forall$ se lit « quelque soit ». On dit que ces symboles sont des quantificateurs (respectivement existentiel et universel).

Soient E un ensemble et p une propriété sur E.
« Il existe $x \in E$ tel que $p(x)$ est vraie » s'écrit : $\exists x \in E, p(x)$
« Pour tout x élément de E, $p(x)$ est vraie » : $\forall x \in E, p(x)$

1.4 Produit cartésien

A deux objets x, y pris dans cet ordre, on associe un nouvel objet, à savoir le couple (x, y). Deux couples (x, y) et (a, b) sont égaux si et seulement si $x = a$ et $y = b$:

$$(x, y) = (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad x = a,\ y = b$$

Soient E et F des ensembles. On appelle produit cartésien des ensembles E et F l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$, noté :

$$E \times F \quad (E \text{ croix } F)$$

Le produit $E \times E$ se note aussi E^2. L'ensemble :

$$\big\{(x, x)/x \in E\big\}$$

s'appelle la diagonale de $E \times E$.

Remarque. $E \times F \neq F \times E$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A des objets $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pris dans cet ordre, on associe un nouvel objet, à savoir le n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Deux n-uples $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sont égaux si et seulement si :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow x_1 = a_1,\ x_2 = a_2, \ldots,\ x_n = a_n$$

On dit que x_i est la i-ème coordonnée de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles. On appelle produit cartésien de $E_1, E_2, \ldots, E_n$ l'ensemble des n-uples $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n$, noté :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$$

Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, on note aussi :

$$E \times E \times \cdots \times = E^n$$

Remarque. L'objet obtenu à partir de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en y introduisant des parenthèses est identifié à $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Par exemple :

$$\big((x, y), z\big) = \big(x, (y, z)\big) = \big(x, y, z\big)$$

Par conséquent, si E, F, G des ensembles :

$$(E \times F) \times G = E \times (F \times G) = E \times F \times G$$

1.5 Applications

Une application f est un triplet constitué par :

- un ensemble *de départ* E.
- un ensemble *d'arrivée* F.
- une règle qui, à tout élément x de E, associe un et un seul élément y de F.

Cet élément y est encore noté $f(x)$ et appelé *l'image* de x par f, ou la *valeur* de f en x ; x est appelé *antécédent* de y.
On dit alors que f est une application de E dans F, ou que f est une fonction définie sur E à valeurs dans F. On écrit :

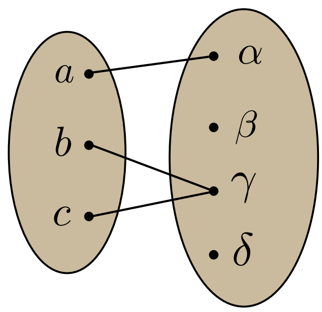
$$f : E \longmapsto F \quad \text{ou} \quad E \xrightarrow{f} F$$

ou :

$$\text{l'application } x \longmapsto f(x) \text{ de } E \text{ dans } F$$

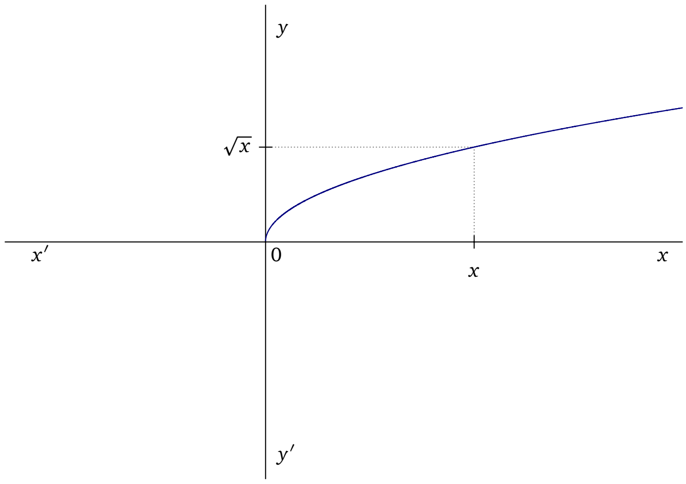
$G_f = \left\{(x, f(x))/x \in E\right\}$ est un sous ensemble de $E \times F$ appelé le graphe de f.

Exemple. L'application f de $\{a, b, c\}$ dans $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ définie par $f(a) = \alpha$, $f(b) = \gamma = f(c)$ est représentée de la manière suivante :



L'application $x \longmapsto \sqrt{x}$ de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ a pour graphe :

$$G = \left\{(x, \sqrt{x})/x \in [0; +\infty[\right\}$$



1.5.1 Application identique

Soit E un ensemble. L'application $x \longmapsto x$ de E dans E s'appelle *l'application identique* sur E, notée Id_E.

Soient E, F des ensembles. Soit $f : E \longmapsto F$ une application. On dit que f est constante si $f(x) = f(x')$ pour tous $x, x' \in E$.

1.5.2 Restriction

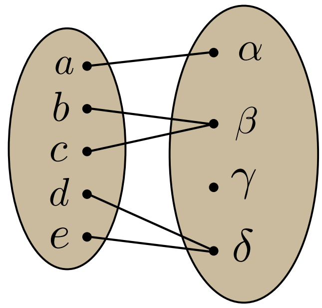
Soient E, F des ensembles et $f : E \longmapsto F$ une application. Soit $A \subset E$. On appelle *restriction* de f à A l'application $x \longmapsto f(x)$ de A dans F. On la note $f_{/A}$.

1.5.3 Image directe

Soient E, F des ensembles. Soit $f : E \longmapsto F$ une application. Soit $A \subset E$. On pose $f(A) = \{f(x)/x \in A\}$, c'est un sous ensemble de F. On dit que $f(A)$ est *l'image directe* de A par f. Soit $y \in F$. On a alors :

$$y \in f(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in A, \ y = f(x)$$

Exemple. $E = \{a, b, c, d, e\}$, $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$



Si $A = \{a, b\}$ on a $f(A) = \{\alpha, \beta\}$.
Si $A = \{b, c\}$ on a $f(A) = \{\beta\}$.
Si $A = E$ on a $f(A) = f(E) = \{\alpha, \beta, \delta\}$.

Remarque. $f(E)$ (l'image directe de E par f) est souvent appelée l'image de f et notée Im_f.

Exemple. Soit l'application $x \longmapsto x^2$ de $[0;2]$ dans $\mathbb{R}$. On a $f([0;2]) = [0;4]$

1.5.4 Image réciproque

Soit $B \subset F$. On pose $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$, c'est un sous ensemble de E appelé *image réciproque* de B par f. Soit $x \in E$, on a donc :

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

Exemple. Soit $B = \{\alpha, \beta\}$, on a : $f^{-1}(B) = \{a, b, c\}$. Soit $B = \{\gamma, \delta\}$ on a : $f^{-1}(B) = \{d, e\}$. Soit l'application $f : x \longmapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f^{-1}([0;1]) &= [-1;1] \\ f^{-1}(\{1\}) &= \{-1;1\} \\ f^{-1}(\{-2\}) &= \emptyset \end{aligned}$$

1.5.5 Propositions

Soient E, F des ensembles et $f : E \longmapsto F$ une application. Soient A_1, A_2 des parties de E. Soient B_1, B_2 des parties de F.

Alors :

$$A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$$
$$f(A_1 \cup A_2) \Longrightarrow f(A_1) \cup f(A_2)$$
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$
$$f^{-1}(f(A_1)) \supset A_1$$
$$B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$$
$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$
$$f\left(f^{-1}(B_1)\right) = (B_1 \cap \mathrm{Im}_F) \subset B_1$$

1.5.6 Surjection, injection et bijection

Soient E, F des ensembles. Soit $f : E \mapsto F$ une application. On dit que f est *surjective* ou est une surjection si $f(E) = F$. Autrement dit, si tout élément de F a au moins un antécédent par f.

Exemple. L'application $x \longmapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas surjective. En revanche, l'application $x \longmapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ est surjective.

On dit que f est *injective* ou est une injection si tout élément de F a au plus un antécédent par f. Autrement dit, f est injective si la relation $f(x) = f(x')$ où $x, x' \in E$, entraîne $x = x'$.

Exemple. L'application $x \longmapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas injective. En revanche, l'application $x \longmapsto x^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ est injective.

On dit que f est *bijective* ou est une bijection si tout élément de F a un et un seul antécédent par f. Autrement dit, si f est injective et surjective.

Exemple. L'application $\mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}^*$ définie par $f(n) = n + 1$ est bijective.

1.5.7 Application réciproque d'une bijection

Soient E, F des ensembles et $f : E \longmapsto F$ une application bijective. On appelle *application réciproque* de f l'application, notée f^{-1}, de F dans E qui, à tout $y \in F$, fait correspondre l'unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Exemple. L'application bijective $n \longmapsto n + 1$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ a pour réciproque l'application bijective $p \longmapsto p - 1$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$.

Remarque. Pour tous $x \in E,\ y \in F$, on a :

$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

L'application $f^{-1} : F \longmapsto E$ est bijective et sa réciproque $(f^{-1})^{-1} = f$.

1.5.8 Composition d'applications

Soient E, F, G des ensembles et $f : E \longmapsto F,\ g : F \longmapsto G$ des applications. On note $g \circ f$ l'application de $E \longmapsto G$ définie par :

$$\forall x \in E \quad (g \circ f)(x) = g\big[f(x)\big]$$

Soient E, F, G, H des ensembles et $f : E \longmapsto F,\ g : F \longmapsto G,\ h : G \longmapsto H$ des applications. Alors, on a :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
$$h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f)$$

On écrira :

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "h\circ g"] & G \arrow[dr, "h"] & \\
E \arrow[ur, "f"] \arrow[urr, "g\circ f"'] \arrow[rrr, "h\circ g\circ f"'] & & & H
\end{tikzcd}$$

1.5.9 Propositions

Soient E, F, G des ensembles, $f : E \longmapsto F,\ g : F \longmapsto G$ des applications.

- Si f est bijective, on a :

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$$

- Si f et g sont surjectives (resp. injectives), alors $g \circ f$ est surjective (resp. injective).
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Supposons que $G = E$. Si $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et si $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ alors f et g sont bijectives et $g = f^{-1}$ ($f = g^{-1}$).

Chapitre 2

Les suites numériques

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

2.1 Généralités sur les suites

2.1.1 Notion de suite

Soit E un ensemble. Une suite d'éléments d'un ensemble E est une application $u : \mathbb{N} \longmapsto E$.

Remarque. Au lieu de prendre $\mathbb{N}$, on prend parfois $\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N}/n > p\}$ où p est donné ($p \in \mathbb{N}$).

L'image $u(n)$ de n par u est notée u_n et appelée *le terme d'indice n* de la suite. La suite u est notée :

$$(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots) \quad \text{ou} \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Si $E = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite réelle (resp. complexe).

Exemple. La suite réelle $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$.

2.1.2 Suite extraite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Soit $(n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N}$, telle que $n_k < n_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. La suite $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots)$, où pour tout $k \in \mathbb{N}$ $v_k = u_{n_k}$, est appelée *suite extraite* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou *sous suite* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple. $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites extraites de $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2.1.3 Convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ ($u_n \to \ell$) si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > n_0$ on ait :

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Si cette condition est vérifiée, on dit aussi que u_n admet ℓ pour limite dans $\mathbb{K}$ et on écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

S'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* et qu'elle converge dans $\mathbb{K}$ vers ℓ. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Problème. Montrer que $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $n_0 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$. On a $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et, si $n \geqslant n_0$, on a :

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} \leqslant \varepsilon$$

donc $\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leqslant \varepsilon$.

2.1.4 Limite en $+\infty$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ($u_n \to +\infty$) si, pour tout réel $A > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$ on ait :

$$u_n > A$$

Si cette condition est vérifiée, on dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme limite et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2.2 Théorèmes sur les suites convergentes

2.2.1 Unicité de la limite d'une suite

2.2.1.1 Théorème. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors, si cette suite admet une limite dans $\mathbb{K}$, cette limite est unique.*

Démonstration. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette pour limites dans $\mathbb{K}$ ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 \neq \ell_2$. Posons :

$$\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$$

On a $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant n_1$ on a $|u_n - l_1 \leqslant \varepsilon|$. Il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant n_2$ on a $|u_n - l_2 \leqslant \varepsilon|$. Posons $n_0 = \max n_1, n_2$. Alors :

$$\begin{aligned}
3\varepsilon = |l_1 - l_2| &= |l_1 - u_{n_0} + u_{n_0} - l_2| \\
&\leqslant |l_1 - u_{n_0}| + |u_{n_0} - l_2| \\
&\leqslant 2\varepsilon \\
3\varepsilon &\leqslant 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Qui mène à une absurdité. □

2.2.2 Limite des suites extraites

2.2.2.1 Théorème. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ convergeant vers un élément $\ell \in \mathbb{K}$. Alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite dans $\mathbb{K}$.*

Démonstration. Soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par définition, il existe $(n_0, n_1, \dots, n_k, \dots)$, suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N}$ tels que $v_k = u_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On vérifie facilement que $k \leqslant n_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; on a $0 \leqslant n_0$ et si $k \leqslant n_k$ alors $k+1 \leqslant n_k + 1 \leqslant n_{k+1}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant k_0$ on a :

$$|u_k - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant k_0$, on a :

$$n_k \geqslant k_0 \quad \text{car} \quad n_k \geqslant k$$

et donc :

$$\begin{aligned}
|u_{n_k} - \ell| &\leqslant \varepsilon \\
|v_k - \ell| &\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Problème. Montrons que la suite $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ diverge.
Cette suite est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_{2p} = 0$ et $u_{2p+1} = 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. La suite extraite $\left(u_{2p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. La suite extraite $\left(u_{2p+1}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. D'après 2.2.2.1, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Remarque. Soit $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $\ell \in \mathbb{K}$. Si la suite converge vers ℓ, alors, d'après 2.2.2.1, la suite $(u_p, u_{p+1}, \dots)$ converge vers ℓ. Réciproquement, si la suite $(u_p, u_{p+1}, \dots)$ converge vers ℓ, il est immédiat que la suite $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$ converge vers ℓ. Par conséquent, la nature (et la limite dans $\mathbb{K}$ si elle existe) d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est inchangée si l'on modifie u_n pour un nombre fini de n.

2.2.3 Suite bornée

2.2.3.1 Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n| \leqslant A$$

2.2.3.2 Théorème. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors, si cette suite converge, elle est bornée.*

Démonstration. Soit $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$|u_n - \ell| \leqslant 1$$

Alors, pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned} |u_n| = |u_n - \ell + \ell| &\leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \\ &\leqslant |\ell| + 1 \end{aligned}$$

Notons A le plus grand des nombres $|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n-1}|, 1 + |\ell|$. On a $A > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n| \leqslant A$$

□

Remarque. La suite $(0, 1, 0, 1, \dots)$ est bornée mais divergente.

2.2.3.3 Théorème (BOLZANO-WEIERSTRASS). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ bornée. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une sous-suite qui converge dans $\mathbb{K}$.*

2.2.4 Opérations sur les limites

2.2.4.1 Théorème. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$, convergentes dans $\mathbb{K}$ respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 ($\in \mathbb{K}$). Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :*

1. *La suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_1 + \ell_2$ dans $\mathbb{K}$.*
2. *La suite $(u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_1 \cdot \ell_2$ dans $\mathbb{K}$.*
3. *La suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \ell_1$ dans $\mathbb{K}$.*
4. *Si $\ell_1 \neq 0$ alors $u_n \neq 0$ pour n assez grand et la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}_{n_0}}$ converge vers $\frac{1}{\ell_1}$ dans $\mathbb{K}$.*
5. *Si $\ell_1 \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ si pour un certain n_0 on a $n \geqslant n_0$ et la suite $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}_{n_0}}$ converge dans $\mathbb{K}$ vers $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.*
6. *La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{K}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers $|\ell|$.*

Démonstration. (1) Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant n_1$, on a :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant n_2$, on a :

$$|v_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Alors, si $n \geqslant n_0$ avec $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| &= |(u_n - \ell_1) + (v_n - \ell_2)| \\
&\leqslant |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

(2) D'après 2.2.3.2, il existe A réel positif tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad |v_n| \leqslant A$. Notons $B = \max\{A,\ |\ell_1|\}$; on a $B > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant n_1$:

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2B}$$

Il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant n_2$:

$$|v_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2B}$$

Posons $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Alors, si $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, on a :

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| &= |(u_n - \ell_1)v_n + \ell_1(v_n - \ell_2)| \\
&= |u_n - \ell_1||v_n| + |\ell_1||v_n - \ell_2| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2B}B + \frac{\varepsilon}{2B}B = \varepsilon
\end{aligned}$$

(3) $\varepsilon > 0$. Si $\lambda = 0$ alors $\lambda u_n = 0$ et $\lambda \ell_1 = 0$, la propriété est vérifiée. Si $\lambda \neq 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \in N$ et $n_0 \leqslant n$:

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

Alors, si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant n_0$, on a :

$$|\lambda||u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \cdot |\lambda| = \varepsilon$$

(4) Puisque $|\ell_1| > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour n entier $\geqslant n_0$:

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \frac{|\ell_1|}{2}$$

Alors, si $n \geqslant n_0$, on a :

$$\begin{aligned} |u_n| = |\ell_1 - (\ell_1 - u_n)| &\geqslant ||\ell_1| - |\ell_1 - u_n|| \\ &= |\ell_1| - |\ell_1 - u_n| \\ &\geqslant |\ell_1| - \frac{|\ell_1|}{2} \\ &= \frac{|\ell_1|}{2} > 0 \end{aligned}$$

D'où $|u_n| > 0$ pour $n \geqslant n_0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}_{n_0}$ tel que, si $n \geqslant n_1$, on a :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon|\ell_1|^2}{2}$$

Alors, si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant n_1$ on a :

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell_1}\right| &= \frac{|\ell_1 - u_n|}{|u_n||\ell_1|} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon|\ell_1|^2}{2|u_n||\ell_1|} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon|\ell_1|^2}{|\ell_1|} \qquad \text{car} \quad \frac{1}{|u_n|} \leqslant \frac{\varepsilon}{|\ell_1|} \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

(5) Découle du (2) et du (4).
(6) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si n entier $n \geqslant n_0$, on a :

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$$

Donc, si $n \in \mathbb{N}_{n_0}$:

$$||u_n| - |\ell_1|| \leqslant |u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$$

□

Remarque. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

En effet : soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$, on a :

$$\Big||u_n| - 0\Big| \leqslant \varepsilon \quad \text{et donc} \quad |u_n - 0| \leqslant \varepsilon$$

Posons $u_n = (-1)^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge mais $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 dans $\mathbb{K}$.

2.2.5 Limite d'une suite complexe

2.2.5.1 Théorème. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et soit $\ell \in \mathbb{C}$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + ib_n$ avec a_n et b_n réels et posons $\ell = a + ib$ avec a, b réels. Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = a \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = b$$

Démonstration. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, d'après 2.2.4.1 on a :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n + ib_n = a + ib$$

Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + ib_n = a + ib$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a :

$$\Big|(a_n + ib_n) - (a + ib)\Big| \leqslant \varepsilon$$

Alors, si $n \geqslant n_0$, on a :

$$\begin{aligned} |a_n - a| &\leqslant \Big|(a_n - a) + i(b_n - b)\Big| \\ &= \Big|(a_n + ib_n) - (a + ib)\Big| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

et

$$|b_n - b| \leqslant \Big|(a_n - a) + i(b_n - b)\Big| \leqslant \varepsilon$$

car, pour $c \in \mathbb{C}$:

$$|\Im(c)| \leqslant |c| \quad \text{et} \quad |\Re(c)| \leqslant |c|$$

□

2.2.6 Limites de suites comparées

2.2.6.1 Théorème. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles convergentes respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 réels. Alors, si $u_n \leqslant v_n$ pour n assez grand ($\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$), on a $\ell_1 \leqslant \ell_2$.*

Démonstration. On peut supposer que $u_n \leqslant v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (cf. 2.2.2). Supposons que $\ell_2 < \ell_1$. Posons :

$$\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{3} > 0$$

Il existe alors $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que, si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant n_1$:

$$|u_n - \ell_1| \leqslant \varepsilon$$

et si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant n_2$:

$$|v_n - \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

Alors, posons $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$; on a :

$$\begin{aligned}
\ell_1 - \ell_2 &= \ell_1 - u_{n_0} + u_{n_0} - \ell_2 \\
&\leqslant \ell_1 - u_{n_0} + v_{n_0} - \ell_2 \\
&\leqslant |\ell_1 - u_{n_0}| + |v_{n_0} - \ell_2| \\
3\varepsilon = \ell_1 - \ell_2 &\leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Absurde, d'où $\ell_1 \leqslant \ell_2$. □

Remarque. Posons $u_n = 0$ et $v_n = \dfrac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n < v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2.2.6.2 Théorème. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles. On suppose, que pour n assez grand, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel ℓ. Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Démonstration. On peut supposer que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (cf. 2.2.2). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que, si $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_1$ on a :

$$\begin{aligned}
|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \quad \iff \quad -\varepsilon &\leqslant u_n - \ell \leqslant \varepsilon \\
\ell - \varepsilon &\leqslant u_n \quad \leqslant \ell + \varepsilon
\end{aligned}$$

Il existe n_1 tel que si $n \geqslant n_2$ on a :

$$l - \varepsilon \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Posons $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Alors, si $n \geqslant n_0$:

$$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

□

2.3 Suites de Cauchy

2.3.1 Définition

2.3.1.1 Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous entiers $p, q \geqslant n_0$ on a :

$$|u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$$

2.3.2 Suites de Cauchy et suites convergentes

2.3.2.1 Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Posons $u_n = a_n + ib_n$ avec $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.*
- *les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy.*

2.3.2.2 Théorème. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$.*
2. *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.*

Démonstration. Soit $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, si n entier $\geqslant n_0$, on a :

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors, si $p, q \in \mathbb{N}_{n_0}$, on a :

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= |u_p - \ell + \ell - u_q| \\ &\leqslant |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le fait que $(2) \Longrightarrow (1)$ découle d'une construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ et on l'admettra. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le fait que $(2) \Longrightarrow (1)$ découle de 2.3.2.1, du cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et de 2.2.3.2. □

2.4 Suites monotones

2.4.1 Définitions

2.4.1.1 Définition. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante si :

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \ldots \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \leqslant u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite décroissante si $u_n \geqslant u_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

2.4.1.2 Définition. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite majorée si $\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$, autrement dit s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leqslant M \quad \text{où } M \text{ ne peut pas dépendre de } n$$

Une suite réelle est dite minorée si l'ensemble des $\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$, si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geqslant m$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si $\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ est borné (cf. 2.2.3.1 et Chap.1 de Maths 2).

2.4.2 Monotonie et convergence

2.4.2.1 Théorème. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, elle est alors convergente vers $\ell = \sup\{u_n/n \in \mathbb{N}\}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors sa limite est $+\infty$ ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente).*

Démonstration. Posons $\ell = \sup\{u_n/n \in \mathbb{N}\}$, qui existe car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$ on a :

$$\ell + \varepsilon > \ell \geqslant u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant \ell - \varepsilon$$

$\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\{u_n/n \in \mathbb{N}\}$

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Soit A réel > 0. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$. Alors, si $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ on a :

$$u_n \geqslant u_{n_0} > A$$

$\forall A > 0, \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$ on a :

$$u_n > A$$

□

2.4.2.2 Théorème. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors elle est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n/n \in \mathbb{N}\}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Remarque. Toute suite réelle convergente est minorée et majorée.

2.4.2.3 Proposition. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$.*

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{N}$. $\forall p \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_p \leqslant u_q$$

En effet, si $p \leqslant q$ on a :

$$u_p \leqslant u_q \leqslant v_q$$

et si $p > q$ on a :

$$u_p \leqslant v_p \leqslant v_q$$

La suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par v_q donc convergente vers ℓ_1 :

$$\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n/n \in \mathbb{N}\} \leqslant v_q$$

Donc, la suite décroissante $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par ℓ_1 ; elle converge donc vers ℓ_2 :

$$\ell_2 = \lim_{n\to+\infty} v_n = \inf\{v_n/n \in \mathbb{N}\} \geqslant \ell_1$$

ℓ_1 minorant inférieur ou égal au plus grand des minorants. □

2.4.3 Suites adjacentes

2.4.3.1 Définition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et si $v_n - u_n$ admet 0 comme limite.

2.4.3.2 Théorème. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles adjacentes. Alors :*

1. $u_n \leqslant v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. *les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Démonstration. (1) Posons $w_n = v_n - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; en effet, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} w_n - w_{n+1} &= v_n - u_n - (v_{n+1} - u_{n+1}) \\ &= (v_n - v_{n+1}) + (u_{n+1} - u_n) \geqslant 0 \end{aligned}$$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$, donc $0 \leqslant w_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (décroissante et convergente).
(2) D'après 2.4.2.3 et (1), on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes. En utilisant 2.2.4.1, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} v_n &= \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n + u_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) + \lim_{n\to+\infty} u_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} u_n \end{aligned}$$

□

Problème. On pose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} \end{aligned}$$

On pose aussi $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et qu'elles convergent vers un même nombre irrationnel.

2.5 Compléments sur les suites

2.5.1 Limites infinies

2.5.1.1 Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle :*

— *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée mais non majorée.*
— *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée mais non minorée.*

Démonstration. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$, on a $u_n > 1$. Notons $\alpha = \min\{u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n_0-1}, 1\}$. On a :

$$\alpha \leqslant u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{donc } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ minorée}$$

Par l'absurde : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée, il existe M réel tel que $u_n \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Notons $A = \max\{M, 1\}$, on a $A > 0$. Vu que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A < u_{n_0}$; on aurait donc :

$$u_{n_0} \leqslant M \leqslant A < u_{n_0}$$

Absurde ! □

2.5.1.2 Théorème. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

Démonstration. Voir 2.2.2.1. □

2.5.1.3 Proposition. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles :*
- *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow +\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée, alors $u_n + v_n \longrightarrow +\infty$*
- *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée et $u_n \longrightarrow -\infty$, alors $u_n + v_n \longrightarrow -\infty$*
- *Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et $v_n \longrightarrow \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+$ ou $\ell = +\infty$, alors $u_n \cdot v_n \longrightarrow +\infty$*
- *Si $u_n \longrightarrow +\infty$ et $v_n \longrightarrow \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_-$ ou $\ell = -\infty$, alors $u_n \cdot v_n \longrightarrow -\infty$*
- *Si $u_n \longrightarrow -\infty$ et $v_n \longrightarrow \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+$ ou $\ell = +\infty$, alors $u_n \cdot v_n \longrightarrow -\infty$*
- *Si $u_n \longrightarrow -\infty$ et $v_n \longrightarrow \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_-$ ou $\ell = -\infty$, alors $u_n \cdot v_n \longrightarrow +\infty$*
- *Si $u_n \longrightarrow +\infty$ ou si $u_n \longrightarrow -\infty$, alors $u_n \neq 0$ pour n assez grand et $\frac{1}{u_n} \longrightarrow 0$*
- *Si $u_n \longrightarrow 0$ et si $u_n > 0$ pour n assez grand, on a $\frac{1}{u_n} \longrightarrow +\infty$*
- *Si $u_n \longrightarrow 0$ et si $u_n < 0$ pour n assez grand, on a $\frac{1}{u_n} \longrightarrow -\infty$*

Démonstration. On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow +\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée. Soit A réel positif. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, il existe α réel tel que :

$$\alpha \leqslant v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Posons $B = \max\{A - \alpha, 1\}$, on a $B > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$u_n + v_n \geqslant A \iff u_n + v_n \geqslant u_n + \alpha$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > B$. Alors, si $n \geqslant n_0$, on a :

$$u_n + v_n > B + \alpha \geqslant A - \alpha = A$$

□

Problème. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $(u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Il existe M réel positif tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|v_n| \leqslant M$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant |u_n \cdot v_n| = |u_n| \cdot |v_n| \leqslant \underbrace{|u_n| \cdot M}_{\longrightarrow 0}$$

Les gendarmes embarquent $(u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0.

2.5.2 Convergence en moyenne — ou au sens de Cesaro

2.5.2.1 Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On lui associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Alors, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un élément ℓ de $\mathbb{K}$, on a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers ℓ.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > n_1$:

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors, si $n > n_1$:

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &= \left|\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} - \ell\right| \\
&= \left|\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n - n\ell}{n}\right| \\
&= \left|\frac{(u_1 - \ell) + (u_2 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n}\right| \\
&= \left|\frac{(u_1 - \ell) + \cdots + (u_{n_1} - \ell)}{n} + \frac{(u_{n_1+1} - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{(u_1 - \ell) + \cdots + (u_{n_1} - \ell)}{n}\right| + \left|\frac{(u_{n_1+1} - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n}\right| \\
&\leqslant \underbrace{\frac{|(u_1 - \ell)| + \cdots + |(u_{n_1} - \ell)|}{n}}_{\to 0} + \frac{(n - n_1)}{n}\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $n > n_2$:

$$\frac{|(u_1 - \ell)| + \cdots + |(u_{n_1} - \ell)|}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Alors, pour tout $n > n_0$ on a :

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

2.5.2.2 Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On lui associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

Alors, si $u_n \longrightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$), on a :

$$v_n \longrightarrow +\infty \quad (\text{resp. } -\infty)$$

Démonstration. Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$. Soit $A > 0 \in \mathbb{R}$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $n > n_1$:

$$u_n > A + 1$$

Pour tout $n > n_1$, on a :

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_{n_1} + u_{n_1+1} + \cdots + u_n}{n} > \underbrace{\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}}{n} + \frac{(n - n_1)}{n}(A+1)}_{\alpha_n}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = A + 1 \Longrightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}^*, \forall n > n_2$, on a :

$$\Big|\alpha_n - (A+1)\Big| \leqslant 1$$

On pose $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Alors, si $n > n_0$:

$$v_n > \alpha_n \geqslant A$$

□

2.6 Suites et limites de fonctions

2.6.0.3 Proposition. *Soit $I \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou x_0 extrémité de I et soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ sauf peut être en x_0. Soit $\ell \in \mathbb{K}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\in I,\ x\neq x_0}} f(x) = \ell$
- *Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $I \setminus \{x_0\}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$, $\underset{n\to+\infty}{f(u_n)} = \ell$*

2.6.0.4 Corollaire. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une application. Soit $x_0 \in I$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *f est continue en x_0*
- *pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$*

Problème. Soit $f :]-1;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Posons $w_n = (1+\frac{1}{n})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel à déterminer.

On a $w_n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$. De plus, $n\ln(1+\frac{1}{n}) = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$. D'après 2.6.0.3, comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

De plus, la fonction $x \longmapsto e^x$ est continue en 1. D'où, en posant :

$$v_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^1 \qquad \text{d'après (2.6.0.4)}$$

2.6.0.5 Proposition. *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ une application telle que $f\big([a,b]\big) \subset [a,b]$. Soit $\alpha \in [a,b]$. Soit la suite d'éléments de $[a,b]$ définie par :*

$$u_0 = \alpha \quad \textit{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. *si f est continue et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors $\ell \in [a,b]$ et $f(\ell) = \ell$.*
2. *si f est croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente.*
3. *si f est décroissante, alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites monotones et convergentes.*

Démonstrations. (1) $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$, $f([a,b]) \subset [a,b], \alpha \in [a,b]$,

$$u_0 = \alpha,\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Supposons f continue et supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a \leqslant (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \leqslant b \quad \text{d'après 2.2.6.1, } a \leqslant \ell \leqslant b$$

D'après 2.6.0.4, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$ (f continue en ℓ), or $u_{n+1} = f(u_n)$ tend vers ℓ, d'où $\ell = f(\ell)$ (unicité de la limite d'une suite).

(2) Supposons f croissante.
1er cas : supposons $u_0 \leqslant u_1$. Démontrons que $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence. On a :

$$u_0 \leqslant u_1$$

Si $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$$

c'est à dire

$$u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b donc convergente.
2e cas : on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \geqslant u_1$. On a :

$$u_0 \geqslant u_1$$

et, si $u_n \geqslant u_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$, alors :

$$f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$$

c'est à dire

$$u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par a, donc convergente.
(3) Supposons f décroissante.
1er cas : supposons $u_0 \leqslant u_2$. Démontrons que $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_0 \leqslant u_1$$

et, si $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2})$$

c'est à dire

$$u_{2n+1} \geqslant u_{2n+3}$$

On en déduit que

$$f(u_{2n+1}) \leqslant f(u_{2n+3})$$

c'est à dire

$$u_{2n+2} \leqslant u_{2n+4}$$

La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b, donc convergente. On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2})$$

c'est à dire

$$u_{2n+1} \geqslant u_{2n+3}$$

donc $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par a, donc convergente.
2ᵉ cas : supposons $u_0 \geqslant u_2$. On montre de manière similaire que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elles convergent toutes deux.

□

2.7 Suites équivalentes

2.7.0.6 Définition. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$. On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *équivalentes*, et on écrit :

$$u_n \sim v_n$$

s'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que :

$$v_n = \lambda_n u_n$$

pour n assez grand, et telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 1$$

Si $u_n \neq 0$ pour n assez grand, il revient au même de dire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$$

2.7.0.7 Proposition. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$. On suppose que $u_n \sim v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$

Démonstration. Se déduit de 2.2.4.1 et 2.5.1.3. □

Remarque. Si, dans 2.7.0.7, on a $\ell = 0$, on dit que u_n et v_n sont deux *infiniment petits équivalents*. Si, dans 2.7.0.7, on a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que u_n et v_n sont des *infiniment grands équivalents*.

2.7.0.8 Proposition. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites d'éléments de* $\mathbb{K}$.

1. *si* $u_n \sim v_n$ *et si* $a_n \sim b_n$, *alors :*
$$u_n a_n \sim v_n b_n$$
2. *si* $a_n, b_n \neq 0$ *pour* n *assez grand, si* $u_n \sim v_n$ *et si* $a_n \sim b_n$, *alors :*
$$\frac{u_n}{a_n} \sim \frac{v_n}{b_n}$$

Démonstration. (1)
$$v_n = \lambda_n u_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 1$$
$$b_n = \mu_n a_n \quad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \mu_n = 1$$
Donc
$$v_n b_n = (\lambda_n \mu_n) u_n a_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n \mu_n = 1$$
(2) Analogue. □

Problème. (1) Montrer que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = \lim_{n\to+\infty} v_n$$
avec $\ell \in \mathbb{K}^*$. Alors $u_n \sim v_n$.

On a :
$$\frac{v_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell}{\ell} = 1 \quad (2.2.4.1)$$
(2) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. On a :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} v_n$$
mais $u_n \not\sim v_n$, car :
$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \neq 1$$
(3) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ et $v_n = n^2$. On a :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty = \lim_{n\to+\infty} v_n$$
mais $u_n \not\sim v_n$, car :
$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{n^2}{n} = n \longrightarrow +\infty$$

(4) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n + \frac{1}{n}$, $v_n = n + \frac{1}{n^2}$, $a_n = -n$, $b_n = -n$. On a $u_n \sim v_n$, car :

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{n + \frac{1}{n^2}}{n + \frac{1}{n}} = \frac{n + \frac{1}{n^3}}{n + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

et $a_n \sim b_n$, mais $u_n + a_n \not\sim v_n + b_n$, car :

$$\frac{v_n + b_n}{u_n + a_n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(5) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ et $v_n = n + 1$. On a $u_n \sim v_n$, mais $e^{u_n} \not\sim e^{v_n}$.

$$\frac{e^{v_n}}{e^{u_n}} = \frac{e^{n+1}}{e^n} = \frac{e^n e}{e^n} = e$$

2.8 Complément sur $\mathbb{R}$

On rappelle le théorème suivant :

2.8.0.9 Théorème. *Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si E est majorée, alors E admet une borne supérieure.*
2. *Si E est minorée, alors E admet une borne inférieure.*

2.8.0.10 Théorème. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < n$.*

Démonstration. Supposons que cette propriété ne soit pas vraie. On a alors :

$$n \leqslant x$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ est alors majoré et, d'après 2.8.0.9, $\mathbb{N}$ admet alors une borne supérieure $b(\in \mathbb{R})$. $b - 1$ n'est pas un alors un majorant de $\mathbb{N}$; il existe donc un certain $p \in \mathbb{N}$, tel que $b - 1 < p$. On aurait alors :

$$p + 1 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad p + 1 \leqslant b < p + 1$$

Ce qui est absurde. □

2.8.0.11 Théorème. *Soient x, y réels avec $x < y$. Il existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que :*

$$x < \alpha < y$$

Démonstration. 1^er cas : supposons $y > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n > \frac{1}{y - x} \qquad n \text{ existe d'après 2.8.0.10 ; on a } n \in \mathbb{N}^*$$

et

$$y - x > \frac{1}{n}$$

Toujours d'après 2.8.0.10, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant ny$. Notons q le plus petit élément de $\{p \in \mathbb{N} / p \geqslant ny\}$. On a :

$$\begin{aligned} q \geqslant ny \quad \text{et} \quad q-1 \in \mathbb{N} \\ q-1 < ny \end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{q-1}{n} < y$$

et aussi

$$x < \frac{q-1}{n}$$

sinon, on aurait

$$x \geqslant \frac{q-1}{n}$$

et par conséquent

$$y - x \leqslant \frac{q}{n} - \frac{q-1}{n} = \frac{1}{n}$$

Ce qui est faux.
Posons $\alpha = \frac{q-1}{n}$. On a :

$$\alpha \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad x < \alpha < y$$

2e cas : supposons $y < 0$. On a alors :

$$-y < -x \quad \text{avec} \quad -x > 0$$

D'après le premier cas, il existe $\beta \in \mathbb{Q}$ tel que :

$$-y < \beta < -x$$

D'où :

$$x < -\beta < y \quad \text{avec} \quad -\beta \in \mathbb{Q}$$

□

2.8.0.12 Corollaire. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que :*

$$x = \lim_{n \to +\infty} r_n$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $r_n \in \mathbb{Q}$ tel que :

$$x - \frac{1}{n} < r_n < x + \frac{1}{n}$$

Vu que :

$$\lim_{n \to +\infty} x - \frac{1}{n} = x = \lim_{x \to +\infty} + \frac{1}{n}$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$. □