Correction de l’examen de Maths 1
du 25 janvier 2007

FmdKdD
fmdkdd [à] free.fr

Université du Havre
Année 2007–2008

Exercice 1

1) $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - y$. On a $(1,0)$ et $(-1,0)$ éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec $(1,0) \neq (-1,0)$, mais :

$$f(1,0) = 1 = f(-1,0)$$

d'où f non injective.
Soit $u \in \mathbb{R}$. Posons $(x,y) = (0,-u)$. On a $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et :

$$f(x,y) = f(0,-u) = 0^2 - (-u) = u$$

d'où f surjective.

2) Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = (x, x^2 + y)$.
Soient (x,y) et (x',y') des éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que :

$$g(x,y) = g(x',y')$$

Alors

$$(x, x^2 + y) = (x', x'^2 + y')$$

d'où

$$x = x' \quad \text{et} \quad x^2 + y = x'^2 + y'$$

Donc

$$x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$$

Ainsi $(x,y) = (x',y')$. Donc g injective.
Soit $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Existe-t-il $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que

$$g(x,y) = (u,v)\,?$$

On a :

$$\begin{aligned} g(x,y) = (u,v) &\iff (x, x^2 + y) = (u,v) \\ &\iff x = u \quad \text{et} \quad x^2 + y = v \\ &\iff x = u \quad \text{et} \quad y = v - u^2 \\ &\iff (x,y) = (u, v - u^2) \end{aligned}$$

En posant $(x,y) = (u, v^2 - u)$, on a :

$$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g(x,y) = (u,v)$$

Donc g est surjective. D'où, g étant à la fois surjective et injective, elle est bijective.

3) $f \circ g$ est une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x, y) = f\left[g(x, y)\right] &= f(x, x^2 + y) \\ &= x^2 - (x^2 + y) = -y\end{aligned}$$

Exercice 2

1) (a)

$$\frac{3^n - 5^n}{3^n + 2 \cdot 5^n}$$

Rappels :

$$\begin{aligned}\text{si } a > 1 \quad a^n \to +\infty \\ \text{si } |a| < 1 \quad a^n \to 0\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{3^n - 5^n}{3^n + 2 \cdot 5^n} = \frac{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1\right)}{5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n + 2\right)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\frac{1}{2}$$

(b)

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{n^2}\cos n^2\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Or

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n^2}\cos n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

2) a réel donné.

$$\begin{aligned}u_n = n\left(\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + 1}\right) &= \frac{n\left(\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + 1}\right)\left(\sqrt{n^2 + an} + \sqrt{n^2 + 1}\right)}{\left(\sqrt{n^2 + an} + \sqrt{n^2 + 1}\right)} \\ &= \frac{n\left(n^2 + an - (n^2 + 1)\right)}{\left(\sqrt{n^2 + an} + \sqrt{n^2 + 1}\right)} \\ &= \frac{n(an - 1)}{n\left(\sqrt{1 + \frac{a}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}&\text{si } a = 0 \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = -\frac{1}{2} \\ &\text{si } a > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \\ &\text{si } a < 0 \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty\end{aligned}$$

Exercice 2

1)

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant a$$

D'où :

$$\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} \times \cdots \times \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant a^{n+1-n_0}$$

c'est à dire

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} \geqslant a^{n+1-n_0} \quad \text{pour tout } n \geqslant n_0$$

Ainsi :

$$u_{n+1} \geqslant a^{n+1} \cdot \frac{u_{n_0}}{a^{n_0}} \quad \text{pour tout } n \geqslant n_0$$

On en déduit que :

$$u_p \geqslant a^p \cdot \frac{u_{n_0}}{a^{n_0}} \quad \text{pour } p > n_0$$

D'où, comme $\lim\limits_{p \to +\infty} a^p = +\infty$, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} u_p = +\infty$$

2)

$$u_n \geqslant \frac{n'}{3^n}$$

On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3} \geqslant 2 \quad \text{pour } n \geqslant 5$$

Voir question précédente.

Exercice 4

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

1) On a :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_0 = \frac{3}{2} \leqslant 2$$

Si, pour un $n \in N$:

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$$

alors

$$\frac{3}{2} \leqslant 1 + u_n \leqslant 3$$

d'où

$$\frac{3}{4} \leqslant \frac{1+u_n}{2} \leqslant \frac{3}{2}$$

et ainsi

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{2}{1+u_n} \leqslant \frac{4}{3}$$

Ainsi

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{4}{3} \leqslant 2$$

2) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Alors, d'après la première question :

$$\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 2$$

Rappel :

$$\text{si } u_n < v_n \quad \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{1+u_n} = \frac{2}{1+\ell}$$

Donc

$$\ell = \frac{2}{1+\ell} \quad \text{c.-à-d.} \quad \ell^2 + \ell - 2 = 0 \quad \text{c.-à-d.} \quad (l-1)(l+2) = 0$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\left|u_{n+1} - 1\right| = \left|\frac{2}{1+u_n} - 1\right| = \left|\frac{2-1-u_n}{1+u_n}\right| = \frac{\left|1-u_n\right|}{1+u_n}$$

Or :

$$u_n \geqslant \frac{1}{2}$$
$$1 + u_n \geqslant \frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{1+u_n} \leqslant \frac{2}{3}$$

D'où :

$$\frac{\left|1-u_n\right|}{1+u_n} \leqslant \frac{2}{3}\left|1-u_n\right|$$

4) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\left|u_n - 1\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \left|u_0 - 1\right|$$

On a :

$$\left|u_0 - 1\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left|u_0 - 1\right|$$

Si :

$$\left|u_n - 1\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \left|u_0 - 1\right|$$

est vrai pour un n donné, alors :

$$\begin{aligned}\left|u_{n+1} - 1\right| &\leqslant \frac{2}{3}\left|u_n - 1\right| \quad \text{(cf 3)}\\ &\leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \left|u_0 - 1\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left|u_0 - 1\right|\end{aligned}$$

5) D'après 4), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \left|u_n - 1\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \left|u_0 - 1\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{2}$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ d'après le théorème des gendarmes.

Exercice 5

1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $a_n > 0$ et $b_n > 0$. On a :

$$a_0 = a > 0 \quad \text{et} \quad b_0 = b > 0$$

Si $a_n > 0$ et $b_n > 0$ pour un n donné, alors :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} > 0 \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} > 0$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\\ &= \frac{\left(a_n + b_n\right)^2 - 4a_n b_n}{2(a_n + b_n)}\\ &= \frac{\left(a_n - b_n\right)^2}{2\left(a_n + b_n\right)}\end{aligned}$$

3) D'après 2), $b_{n+1} - a_{n+1} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
De plus, $b_0 - a_0 = b - a \geqslant 0$.
Donc $b_n - a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant b_{n+1} - a_{n+1}$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{\left(b_n - a_n\right)^2}{2\left(a_n + b_n\right)} \\ &= \frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right) \cdot \frac{b_n - a_n}{b_n + a_n} \end{aligned}$$

Or $b_n - a_n < b_n + a_n$ car $a_n > 0$. Et ainsi :

$$\frac{b_n - a_n}{b_n + a_n} < 1 \quad \text{vu que } a_n + b_n > 0$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right)\left(\frac{b_n - a_n}{b_n + a_n}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right) \quad \text{car } \frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right) \geqslant 0$$

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right)$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} - a_n \\ &= \frac{2a_n b_n - a_n^2 - a_n b_n}{a_n + b_n} \\ &= \frac{a_n\left(b_n - a_n\right)}{a_n + b_n} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Et

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0$$

Ainsi $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et $\left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

5) 1[re] méthode. On a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Posons $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = \ell_2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$$

D'où :

$$\ell_2 = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$$

et ainsi $\ell_1 = \ell_2$.
2[e] méthode. On a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$. Car, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \left|b_{n+1} - a_{n+1}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|b_n - a_n\right|$$

et on en déduit par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant \left|b_{n+1} - a_{n+1}\right| \leqslant (\frac{1}{2})^n \left|b_n - a_n\right|$$

D'où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes ; elles convergent donc vers un même réel ℓ.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} \cdot b_{n+1} = a_n \cdot b_n$$

donc $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite constante et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n b_n = ab$$

Ainsi, $ab = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = \ell^2$. Or

$$0 < a \leqslant a_n \leqslant \ell \leqslant b_n \leqslant b \quad \text{(pour tout } n \in \mathbb{N}\text{)}$$

Donc $\ell > 0$ Ainsi :

$$\ell = \sqrt{ab}$$